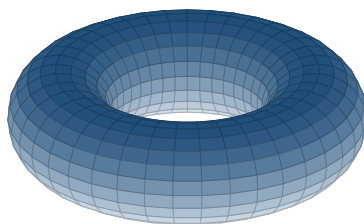


# Geometria differenziale di curve e superfici

---

Un'introduzione illustrata  
in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , con esercizi



Luca Eliseo Pavesi

Ottobre 2026

## **Geometria differenziale di curve e superfici**

Prima edizione, ottobre 2026.

Composto con  $\text{\LaTeX}$  (XeLaTeX), Latin Modern. Le figure sono realizzate con TikZ e pgfplots.

Tutte le formule numeriche citate negli esempi e nelle soluzioni sono state controllate al calcolatore (gli script sono forniti insieme al testo).

# Prefazione

---

Questo testo è un'introduzione alla geometria differenziale delle curve e delle superfici del piano e dello spazio euclideo. È pensato per chi ha già visto un corso di analisi in più variabili e di algebra lineare e vuole capire *che cosa* significa misurare la «curvatura» di un oggetto, *come* si calcola e *perché* i teoremi fondamentali sono veri.

**Come è organizzato.** Il Capitolo 0 raccoglie gli strumenti di analisi e di algebra lineare necessari. I Capitoli 1 e 2 trattano le curve (nel piano e nello spazio), i Capitoli 3 e 4 le superfici regolari e la loro curvatura, il Capitolo 5 la geometria intrinseca (geodetiche e Teorema Egregium di Gauss) e il Capitolo 6 il teorema di Gauss–Bonnet, che lega la curvatura alla topologia.

**Come si legge.** Ogni capitolo alterna spiegazioni, esempi svolti e figure. I riquadri hanno un ruolo preciso:

## Definizione

fissa il significato di una parola o di un oggetto.

## Teorema / Proposizione

un risultato; segue di norma la dimostrazione.

## Esempio

un calcolo completo, da rifare con carta e penna.

## Per capire

l'idea dietro la formula, senza tecnicismi.

## Attenzione

un errore frequente o una convenzione di segno.

**Rigore.** Ogni enunciato è dimostrato, oppure è indicato esplicitamente come «enunciato senza dimostrazione» (con un riferimento) o come «traccia della

dimostrazione». Si lavora con curve e superfici di classe  $C^\infty$ , per non appesantire le ipotesi; molti risultati richiedono meno regolarità.

**Gli esercizi** sono alla fine di ogni capitolo, con tre livelli di difficoltà (● base, ●● medio, ●●● impegnativo). Gli esercizi segnati con <sup>S</sup> hanno la soluzione alla fine del volume: provate sempre prima da soli.

**Lecture consigliate.** M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*; A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*; M. Abate e F. Tovena, *Curve e superfici*; W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds*. Dove una formula o una convenzione è presa da questi testi lo si dice nel testo.

# Indice

---

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Prefazione</b>                                              | <b>iii</b> |
| <b>0 Strumenti preliminari</b>                                 | <b>1</b>   |
| 0.1 Vettori, prodotto scalare e prodotto vettoriale . . . . .  | 1          |
| 0.2 Funzioni vettoriali di una variabile . . . . .             | 2          |
| 0.3 Differenziale e funzione inversa . . . . .                 | 2          |
| 0.4 Integrali e teorema di Green . . . . .                     | 3          |
| 0.5 Sistemi lineari di equazioni differenziali . . . . .       | 3          |
| 0.6 Isometrie dello spazio . . . . .                           | 4          |
| <b>1 Curve piane</b>                                           | <b>5</b>   |
| 1.1 Curve parametrizzate regolari . . . . .                    | 5          |
| 1.2 Lunghezza e parametro d'arco . . . . .                     | 6          |
| 1.3 Curvatura di una curva piana . . . . .                     | 8          |
| 1.4 Il teorema fondamentale delle curve piane . . . . .        | 10         |
| 1.5 Cerchio osculatore ed evoluta . . . . .                    | 11         |
| 1.6 Curve chiuse e indice di rotazione . . . . .               | 12         |
| 1.7 Esercizi . . . . .                                         | 13         |
| <b>2 Curve nello spazio</b>                                    | <b>16</b>  |
| 2.1 Riferimento di Frenet e torsione . . . . .                 | 16         |
| 2.2 Formule in un parametro qualunque . . . . .                | 17         |
| 2.3 Il teorema fondamentale delle curve nello spazio . . . . . | 19         |
| 2.4 Eliche generalizzate . . . . .                             | 20         |

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5      | Sviluppo locale della curva . . . . .                   | 20        |
| 2.6      | Esercizi . . . . .                                      | 21        |
| <b>3</b> | <b>Superfici regolari e prima forma fondamentale</b>    | <b>23</b> |
| 3.1      | Superfici regolari . . . . .                            | 23        |
| 3.2      | Piano tangente e normale . . . . .                      | 25        |
| 3.3      | La prima forma fondamentale . . . . .                   | 26        |
| 3.4      | Isometrie locali . . . . .                              | 28        |
| 3.5      | Esercizi . . . . .                                      | 29        |
| <b>4</b> | <b>Curvatura delle superfici</b>                        | <b>31</b> |
| 4.1      | La mappa di Gauss e l'operatore forma . . . . .         | 31        |
| 4.2      | Curvatura normale: Meusnier ed Eulero . . . . .         | 32        |
| 4.3      | Formule in coordinate . . . . .                         | 34        |
| 4.4      | Come è fatta una superficie vicino a un punto . . . . . | 36        |
| 4.5      | Esercizi . . . . .                                      | 37        |
| <b>5</b> | <b>Geometria intrinseca: Egregium e geodetiche</b>      | <b>39</b> |
| 5.1      | I simboli di Christoffel . . . . .                      | 39        |
| 5.2      | Il Theorema Egregium . . . . .                          | 40        |
| 5.3      | Geodetiche . . . . .                                    | 42        |
| 5.4      | Esercizi . . . . .                                      | 45        |
| <b>6</b> | <b>Il teorema di Gauss–Bonnet</b>                       | <b>47</b> |
| 6.1      | Curvatura geodetica in coordinate ortogonali . . . . .  | 47        |
| 6.2      | Il teorema locale . . . . .                             | 48        |
| 6.3      | Il teorema globale . . . . .                            | 50        |
| 6.4      | Conseguenze . . . . .                                   | 51        |
| 6.5      | Esercizi . . . . .                                      | 52        |
| <b>A</b> | <b>Soluzioni degli esercizi</b>                         | <b>53</b> |

# 0

## Strumenti preliminari

---

Questo capitolo non è da leggere tutto d'un fiato: serve da riferimento. Si fissano le notazioni e si ricordano, spesso con la dimostrazione, i fatti che useremo più volte.

### 0.1 Vettori, prodotto scalare e prodotto vettoriale

In  $\mathbb{R}^n$  indichiamo con  $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$  il prodotto scalare e con  $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$  la norma. Vale la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz  $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$ . L'angolo  $\theta \in [0, \pi]$  tra due vettori non nulli è definito da  $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \theta$ .

In  $\mathbb{R}^3$  il *prodotto vettoriale*  $a \times b$  è l'unico vettore tale che  $\langle a \times b, c \rangle = \det(a, b, c)$  per ogni  $c$ , dove  $\det(a, b, c)$  è il determinante della matrice di colonne  $a, b, c$ . Dalle proprietà del determinante seguono:

- (a)  $a \times b$  è bilineare e antisimmetrico:  $b \times a = -a \times b$ ;
- (b)  $a \times b$  è ortogonale sia ad  $a$  sia a  $b$  (perché  $\det(a, b, a) = \det(a, b, b) = 0$ );
- (c) vale l'*identità di Lagrange*

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2, \quad (0.1)$$

quindi  $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$  è l'area del parallelogramma di lati  $a, b$ ; in particolare  $a \times b = 0$  se e solo se  $a$  e  $b$  sono linearmente dipendenti;

- (d)  $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$ .

**Per capire**

La condizione « $a, b$  linearmente indipendenti» si traduce in  $\|a \times b\| \neq 0$ , ossia in  $\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 > 0$ . Useremo questa forma per le superfici: vedremo che  $EG - F^2 > 0$  è esattamente la condizione di indipendenza dei vettori tangenti coordinati.

## 0.2 Funzioni vettoriali di una variabile

Se  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono derivabili ( $I$  intervallo) e  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile, valgono

$$(\langle f, g \rangle)' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle, \quad (\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f', \quad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

(l'ultima solo per  $n = 3$ ). Segue un fatto usato continuamente:

**Proposizione 0.1: Vettori di norma costante**

*Se  $\|f(t)\|$  è costante, allora  $\langle f, f' \rangle \equiv 0$ : la derivata è ortogonale al vettore.*

*Dimostrazione.* Derivando  $\langle f, f \rangle = \text{cost}$  si ottiene  $2\langle f, f' \rangle = 0$ . ■

## 0.3 Differenziale e funzione inversa

Una funzione  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $U$  aperto) è *differenziabile* (di classe  $C^\infty$ ) se tutte le sue derivate parziali di ogni ordine esistono e sono continue. Il suo *differenziale* in  $q$  è l'applicazione lineare  $dF_q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  rappresentata dalla matrice jacobiana  $(\partial F_i / \partial x_j)(q)$ . Ricordiamo senza dimostrazione tre teoremi di analisi:

**Teorema 0.2: della funzione inversa**

*Se  $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è differenziabile e  $dF_q$  è invertibile, esistono intorno aperti  $V \ni q$  e  $W \ni F(q)$  tali che  $F|_V: V \rightarrow W$  è biunivoca con inversa differenziabile.*

**Teorema 0.3: della funzione implicita**

*Sia  $f: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile e  $f(p) = a$  con  $\nabla f(p) \neq 0$ , ad esempio  $\partial f / \partial z(p) \neq 0$ . Allora in un intorno di  $p$  l'insieme  $\{f = a\}$  è il grafico  $z = h(x, y)$  di una funzione differenziabile  $h$ .*

**Teorema 0.4: di Schwarz**

*Se  $F$  è di classe  $C^2$ , le derivate seconde miste coincidono:  $\partial_u \partial_v F = \partial_v \partial_u F$ .*

## 0.4 Integrali e teorema di Green

Se  $h: Q' \rightarrow Q$  è un diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^2$  con jacobiano  $J_h$ , vale la formula di cambio di variabili  $\iint_Q \varphi \, du \, dv = \iint_{Q'} (\varphi \circ h) |\det J_h| \, du' \, dv'$ . Il *teorema di Green* afferma che, se  $R \subset \mathbb{R}^2$  è una regione limitata con bordo  $\partial R$  unione di curve regolari a tratti, orientato in modo che  $R$  stia a sinistra, e  $P, Q$  sono differenziabili, allora

$$\oint_{\partial R} P \, du + Q \, dv = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du \, dv.$$

## 0.5 Sistemi lineari di equazioni differenziali

**Teorema 0.5: di esistenza e unicità lineare**

*Sia  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$  continua su un intervallo  $I$ ,  $s_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^k$ . Il problema di Cauchy  $y'(s) = A(s)y(s)$ ,  $y(s_0) = y_0$ , ha un'unica soluzione definita su tutto  $I$ , e la soluzione è differenziabile quanto lo è  $A$ .*

Questo teorema (nella versione per sistemi lineari è conseguenza del teorema di Picard–Lindelöf) è la chiave delle dimostrazioni dei teoremi fondamentali per le curve (Capitoli 1 e 2). Lo stesso enunciato vale per equazioni in matrici  $Y' = A(s)Y$ , pensando le entrate di  $Y$  come incognite.

## 0.6 Isometrie dello spazio

Una *isometria* di  $\mathbb{R}^n$  è una funzione  $x \mapsto Mx + b$  con  $M$  matrice *ortogonale* ( $M^T M = \text{Id}$ ) e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Si dice *propria* se  $\det M = 1$  (rotazione più traslazione): non cambia l'orientazione. Le isometrie conservano distanze, angoli e lunghezze; se sono proprie conservano anche il segno del determinante di una terna di vettori. Due curve si dicono *congruenti* se differiscono per un'isometria propria.

# 1

## Curve piane

---

Una curva è, intuitivamente, il percorso di un punto che si muove. La geometria differenziale studia questi percorsi con gli strumenti del calcolo: velocità, accelerazione e, soprattutto, *quanto una curva si piega*. In questo capitolo ci limitiamo al piano  $\mathbb{R}^2$ , dove tutto si può disegnare e dove compare già l'idea centrale dell'intero libro: la curvatura misura la rapidità con cui cambia la direzione della tangente.

### 1.1 Curve parametrizzate regolari

#### Definizione 1.1: Curva parametrizzata regolare

Una *curva parametrizzata* è un'applicazione differenziabile  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo. Il vettore  $\alpha'(t)$  è il *vettore velocità*,  $\|\alpha'(t)\|$  la *velocità scalare*. La curva è *regolare* se  $\alpha'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . L'immagine  $\alpha(I)$  si chiama *traccia*.

Una curva e la sua traccia sono cose diverse: la stessa traccia (per esempio una circonferenza) si può percorrere in molti modi, più o meno velocemente, una o più volte. La regolarità serve a garantire che in ogni punto sia definita una *retta tangente*, di direzione  $\alpha'(t)$ .

#### Esempio 1.2: Tre curve

- (a)  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è la circonferenza di raggio  $R$ :  $\alpha' = (-R \sin t, R \cos t)$  ha norma  $R$ , è regolare.

- (b)  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$  con  $a > b > 0$  è l'ellisse di semiassi  $a, b$ ; ancora  $\alpha' \neq 0$  perché  $\sin t$  e  $\cos t$  non si annullano insieme.
- (c)  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$  non è regolare in  $t = 0$ , dove  $\alpha'(0) = (0, 0)$ : la traccia ha una *cuspid*e nell'origine.

### Esempio 1.3: La cicloide

Una ruota di raggio  $r$  rotola senza strisciare sull'asse  $x$ ; un punto della circonferenza descrive la *cicloide*

$$\alpha(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha  $\alpha'(t) = r(1 - \cos t, \sin t)$ , che si annulla esattamente per  $t = 2k\pi$ : nei punti in cui il punto tocca terra la curva ha una *cuspid*e (Figura 1.1). Poiché  $(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t = 4 \sin^2(t/2)$ , la velocità scalare è  $\|\alpha'(t)\| = 2r|\sin(t/2)|$ .

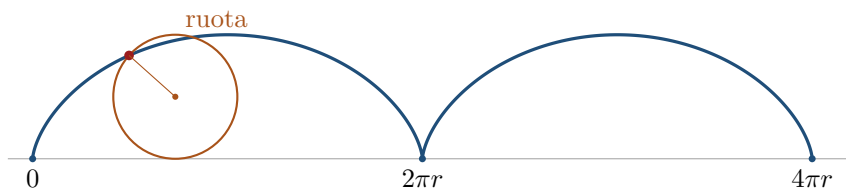


**Figura 1.1.** La cicloide ( $r = 1$ ). Nei punti di contatto con l'asse,  $\alpha' = 0$  e la curva ha una *cuspid*e.

## 1.2 Lunghezza e parametro d'arco

### Definizione 1.4: Lunghezza

La *lunghezza* della curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ .

(Si arriva a questa formula approssimando la curva con poligoni inscritti; vedi do Carmo, §1-3.) Per l'esempio della cicloide, per  $t \in [0, 2\pi]$  (un arco),  $L = \int_0^{2\pi} 2r \sin(t/2) dt = 8r$ .

La lunghezza è una proprietà della *traccia percorsa*, non di come la percorriamo. Per esprimerlo conviene cambiare parametro. Una *riparametrizzazione* di  $\alpha$  è la curva  $\beta = \alpha \circ h$ , dove  $h: J \rightarrow I$  è un diffeomorfismo con  $h' > 0$  (si conserva il verso di percorrenza). Allora  $\beta'(u) = h'(u) \alpha'(h(u))$ , quindi  $\beta$  è regolare se e solo se lo è  $\alpha$ , e

$$\int_c^d \|\beta'(u)\| du = \int_c^d \|\alpha'(h(u))\| h'(u) du = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt,$$

cioè la lunghezza non cambia (è il teorema di cambio di variabile in una dimensione).

#### Definizione 1.5: Parametro d'arco

Una curva regolare è *parametrizzata per lunghezza d'arco* se  $\|\alpha'(s)\| = 1$  per ogni  $s$ .

#### Proposizione 1.6: Esistenza del parametro d'arco

Ogni curva regolare  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ammette una *riparametrizzazione per lunghezza d'arco*.

*Dimostrazione.* Fissato  $t_0 \in I$  poniamo  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$ . Per il teorema fondamentale del calcolo  $s$  è differenziabile (ricordiamo che  $\alpha$  è  $C^\infty$  e  $\alpha' \neq 0$ , dunque  $\|\alpha'\| = \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle}$  è  $C^\infty$ ) con  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ . Quindi  $s$  è un diffeomorfismo da  $I$  su un intervallo  $J$ . Posto  $\beta = \alpha \circ s^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si ha  $\beta'(s) = \alpha'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ , che ha norma 1. ■

#### Per capire

Parametrizzare per lunghezza d'arco significa percorrere la curva a velocità costante 1: il parametro è lo spazio percorso, come il contachilometri di un'auto. Così le proprietà del *percorso* (curvatura, torsione) non si confondono con quelle del *modo* di percorrerlo. In pratica, quasi mai si riesce a scrivere  $s^{-1}$  in forma esplicita (già per l'ellisse servono integrali ellittici): per questo daremo anche le formule valide per un parametro qualunque.

Per una curva parametrizzata per lunghezza d'arco indicheremo la derivata con  $\alpha'(s) = T(s)$ , il *vettore tangente unitario*.

### 1.3 Curvatura di una curva piana

Sia  $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotazione di  $+90^\circ$ :  $J(x, y) = (-y, x)$ . Sia  $\alpha$  una curva piana parametrizzata per lunghezza d'arco,  $T = \alpha'$  e  $N = JT$  il *vettore normale* (ruotato a sinistra di  $T$ ). La coppia  $(T, N)$  è una base ortonormale positiva, il *riferimento di Frenet* della curva.

Poiché  $\|T\| = 1$ , la Proposizione 0.1 dà  $\langle T', T \rangle = 0$ , dunque  $T'$  è parallelo a  $N$ .

#### Definizione 1.7: Curvatura (con segno)

La funzione  $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $T'(s) = \kappa(s) N(s)$ , ossia  $\kappa = \langle T', N \rangle = \langle \alpha'', J\alpha' \rangle$ , è la *curvatura* di  $\alpha$ . Il numero  $\rho = 1/|\kappa|$  (se  $\kappa \neq 0$ ) è il *raggio di curvatura*.

Derivando  $\langle N, T \rangle = 0$  e  $\langle N, N \rangle = 1$  si ottiene  $\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\kappa$  e  $\langle N', N \rangle = 0$ . Si ottengono così le *equazioni di Frenet* del piano:

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T. \quad (1.1)$$

#### Per capire

$\kappa$  è la *velocità angolare della tangente*: se scriviamo  $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ , allora  $T' = \theta'(-\sin \theta, \cos \theta) = \theta' N$ , cioè  $\kappa = \theta'$ . Una curva con  $\kappa > 0$  gira a sinistra, con  $\kappa < 0$  a destra, con  $\kappa = 0$  va dritta.

#### Attenzione

Il *segno* di  $\kappa$  dipende dal verso di percorrenza: se percorriamo la curva al contrario,  $T$  e  $N$  cambiano segno e  $\kappa$  cambia segno. Solo  $|\kappa|$  è una proprietà della traccia. Anche una riflessione del piano cambia il segno di  $\kappa$ .

Spesso la curva è data in una parametrizzazione qualunque. Scriviamo  $v = \|\alpha'\| = ds/dt$  e  $T = \alpha'/v$ .

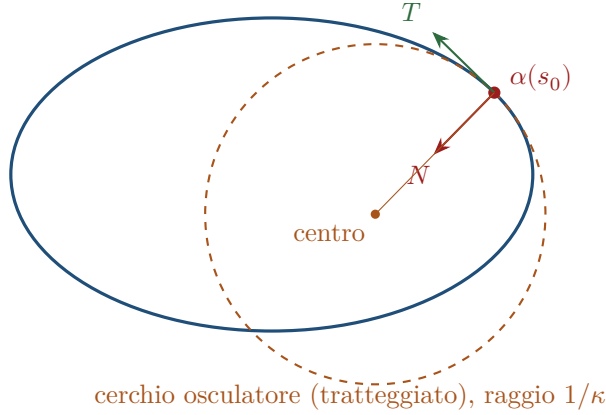


**Figura 1.2.** Riferimento di Frenet  $(T, N)$  su un'ellisse e cerchio osculatore nel punto indicato. Il centro è  $\alpha + N/\kappa$ .

**Proposizione 1.8: Curvatura in un parametro qualunque**

Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  è regolare, la sua curvatura (con segno) è

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{\|\alpha'\|^3}.$$

In particolare, per il grafico  $y = f(x)$  (parametro  $x$ ):  $\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$ .

*Dimostrazione.* Da  $\alpha' = vT$  segue  $\alpha'' = v'T + v \frac{dT}{dt} = v'T + v^2\kappa N$ , dove abbiamo usato  $dT/dt = v dT/ds = v\kappa N$ . Quindi  $\det(\alpha', \alpha'') = \det(vT, v'T + v^2\kappa N) = v^3\kappa \det(T, N) = v^3\kappa$ , perché  $\det(T, T) = 0$  e  $\det(T, N) = 1$ . ■

**Esempio 1.9: Curvatura di cerchio, ellisse, cicloide**

- (a) Circonferenza di raggio  $R$  (antioraria):  $x'y'' - y'x'' = R^2$ ,  $v = R$ , quindi  $\kappa = 1/R$  costante.
- (b) Ellisse  $(a \cos t, b \sin t)$ :  $x'y'' - y'x'' = ab$  e  $v^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ , quindi

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Ai vertici  $t = 0$  vale  $a/b^2$  (raggio di curvatura  $b^2/a$ ); in  $t = \pi/2$  vale  $b/a^2$ .

- (c) Cicloide ( $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ):  $x'y'' - y'x'' = r^2(\cos t - 1) = -2r^2 \sin^2(t/2)$  e  $v^3 = 8r^3 |\sin(t/2)|^3$ , quindi  $\kappa = -\frac{1}{4r \sin(t/2)}$  per  $t \in (0, 2\pi)$ . Il raggio di curvatura nel punto più alto ( $t = \pi$ ) è  $4r$  e per  $t \rightarrow 0^+$  la curvatura diverge: la cuspid.

## 1.4 Il teorema fondamentale delle curve piane

La curvatura determina la curva? In un senso molto preciso sì: è l'unico «dato» necessario, a meno di movimenti rigidi.

### Teorema 1.10: Fondamentale delle curve piane

*Sia  $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile e  $s_0 \in I$ . Esiste una curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzata per lunghezza d'arco con curvatura  $\kappa$ . Inoltre, se  $\beta$  è un'altra curva con la stessa proprietà, esiste un'isometria propria  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^2$  con  $\beta = \Phi \circ \alpha$ .*

*Dimostrazione. Esistenza.* Poniamo  $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du$  e

$$\alpha(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos \theta(u) du, \int_{s_0}^s \sin \theta(u) du \right).$$

Allora  $\alpha' = (\cos \theta, \sin \theta)$  ha norma 1 e  $\alpha'' = \theta'(-\sin \theta, \cos \theta) = \kappa J\alpha'$ , ossia la curvatura di  $\alpha$  è  $\kappa$ .

*Unicità.* Siano  $F_\alpha = (T_\alpha | N_\alpha)$  e  $F_\beta$  le matrici  $2 \times 2$  che hanno per colonne i riferimenti di Frenet. Per (1.1), entrambe risolvono  $Y' = YK$  con  $K = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ . Sia  $M = F_\beta(s_0)F_\alpha(s_0)^{-1}$ : è una matrice ortogonale con  $\det M = 1$  (le due basi sono ortonormali e positive). Anche  $MF_\alpha$  risolve  $Y' = YK$  e ha lo stesso valore iniziale di  $F_\beta$ ; per l'unicità (Teorema 0.5, applicato alle trasposte)  $F_\beta = MF_\alpha$ . In particolare  $\beta' = T_\beta = MT_\alpha = (M\alpha)'$ , dunque  $\beta = M\alpha + b$  per un vettore costante  $b$ . ■

**Proposizione 1.11: Curvatura costante**

*Una curva piana parametrizzata per lunghezza d'arco con  $\kappa \equiv 0$  è un segmento di retta; con  $\kappa \equiv \kappa_0 \neq 0$  è un arco di circonferenza di raggio  $1/|\kappa_0|$ .*

*Dimostrazione.* Il cerchio  $(R \cos(s/R), R \sin(s/R))$  ha curvatura  $1/R$  (Esempio 1.9); la retta  $\alpha(s) = p + sv$  con  $\|v\| = 1$  ha  $\alpha'' = 0$ . Per l'unicità del Teorema 1.10 (e se  $\kappa_0 < 0$  si percorre il cerchio al contrario) non ce ne sono altre. ■

## 1.5 Cerchio osculatore ed evoluta

Sia  $\kappa(s_0) \neq 0$ . Il *centro di curvatura* è  $C = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)$  e il *cerchio osculatore* è la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $1/|\kappa(s_0)|$  (Figura 1.2). È, fra tutti i cerchi, quello che «meglio» approssima la curva in  $\alpha(s_0)$ :

**Proposizione 1.12: Contatto del secondo ordine**

*Sia  $g(s) = \|\alpha(s) - C\|^2 - \kappa(s_0)^{-2}$ . Allora  $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Per costruzione  $\alpha(s_0) - C = -N(s_0)/\kappa(s_0)$ , quindi  $g(s_0) = 0$ . Poi  $g' = 2\langle T, \alpha - C \rangle$ , che in  $s_0$  vale  $-2\langle T, N \rangle/\kappa = 0$ ; infine  $g'' = 2\langle T', \alpha - C \rangle + 2\langle T, T \rangle = 2\kappa\langle N, \alpha - C \rangle + 2$ , che in  $s_0$  vale  $2\kappa \cdot (-1/\kappa) + 2 = 0$ . ■

Un cerchio qualunque passante per  $\alpha(s_0)$  ha in generale  $g = g' = 0$  solo se è tangente alla curva; il cerchio osculatore guadagna un ordine in più. Calcolando un passo oltre si trova  $g'''(s_0) = -2\kappa'(s_0)/\kappa(s_0)$ : dove  $\kappa' \neq 0$  il cerchio osculatore *attraversa* la curva (come si vede nella Figura 1.2), ai vertici  $\kappa' = 0$  no.

Il luogo dei centri di curvatura,  $\beta(s) = \alpha(s) + N(s)/\kappa(s)$ , si chiama *evoluta* di  $\alpha$  (Esercizio 1.8).

## 1.6 Curve chiuse e indice di rotazione

Una curva  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzata per lunghezza d'arco è *chiusa* di lunghezza  $L > 0$  se  $\alpha(s + L) = \alpha(s)$  per ogni  $s$  (e  $L$  è il più piccolo con questa proprietà); è *semplice* se  $\alpha$  è iniettiva su  $[0, L)$ . Scriviamo  $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  con  $\theta$  differenziabile (esiste:  $\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \kappa$ , come nella dimostrazione del Teorema 1.10). Poiché  $T(L) = T(0)$ , la differenza  $\theta(L) - \theta(0)$  è un multiplo intero di  $2\pi$ .

### Definizione 1.13: Indice di rotazione

L'*indice di rotazione* di una curva chiusa è l'intero

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

È il numero di giri che compie la tangente mentre percorriamo la curva una volta (Figura 1.3). Il risultato seguente, di Heinz Hopf (1935), è il primo esempio di legame fra geometria locale (curvatura) e topologia (forma globale).

### Teorema 1.14: Umlaufsatz di Hopf

Una curva piana chiusa e semplice, percorsa in senso antiorario, ha indice di rotazione  $+1$ ; cioè  $\int_0^L \kappa ds = 2\pi$ .

Ne omettiamo la dimostrazione (la si trova in do Carmo, §5-7, o in Presley, §3.3): è l'unico risultato del capitolo che non dimostriamo. Che l'ipotesi «semplice» sia necessaria si vede dalla Figura 1.3: la lemniscata ha indice 0, il limaçon con cappio interno ha indice 2.

### In sintesi

- Una curva regolare si può parametrizzare per lunghezza d'arco:  $\|\alpha'\| = 1$ .
- In  $\mathbb{R}^2$ :  $T' = \kappa N$ ,  $N' = -\kappa T$ , con  $\kappa = \det(\alpha', \alpha'')/\|\alpha'\|^3$  in un parametro qualunque.
- La curvatura determina la curva a meno di isometrie proprie (Teorema 1.10);  $\kappa$  costante  $\Rightarrow$  cerchio o retta.

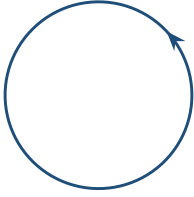
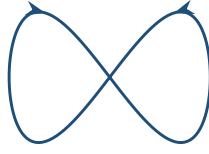
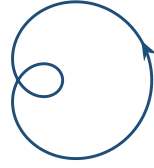
 $i = 1$  (cerchio) $i = 0$  (a otto) $i = 2$  (limaçon)

**Figura 1.3.** Tre curve chiuse con indice di rotazione 1, 0 e 2. Le prime e l'ultima mostrano che l'indice conta i giri della tangente, non i giri attorno a un punto.

- Per curve chiuse  $\int \kappa ds = 2\pi i$ , e  $i = 1$  se la curva è semplice (Hopf).

## 1.7 Esercizi

### Esercizio 1.1: • <sup>S</sup>

Calcolare la curvatura della parabola  $y = x^2$  nel punto di ascissa  $x$ . Determinare il centro e il raggio del cerchio osculatore nel vertice.

### Esercizio 1.2: • <sup>S</sup>

Verificare che l'arco di cicloide  $t \in [0, 2\pi]$  ha lunghezza  $8r$  e che l'area compresa tra l'arco e l'asse  $x$  è  $3\pi r^2$ .

### Esercizio 1.3: • <sup>S</sup>

Per l'ellisse  $(a \cos t, b \sin t)$  con  $a > b$ , mostrare che la curvatura ha massimo  $a/b^2$  nei punti  $(\pm a, 0)$  e minimo  $b/a^2$  nei punti  $(0, \pm b)$ .

### Esercizio 1.4: •• <sup>S</sup>

Si consideri la catenaria  $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ . Mostrare che, scegliendo il parametro d'arco con  $s(0) = 0$ , si ha  $s = \sinh t$ , e che la curvatura in funzione di  $s$  è  $\kappa(s) = 1/(1 + s^2)$ .

**Esercizio 1.5:** ●● <sup>S</sup>

La *spirale logaritmica* è  $\alpha(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$  con  $a > 0$ . Mostrare che  $\|\alpha'\| = \sqrt{1+a^2} e^{at}$ , che  $\kappa = 1/(\sqrt{1+a^2} e^{at})$ , e che la lunghezza del tratto  $t \in (-\infty, 0]$  è finita, uguale a  $\sqrt{1+a^2}/a$ , benché la curva giri infinite volte attorno all'origine.

**Esercizio 1.6:** ●● <sup>S</sup>

Una curva in coordinate polari  $r = r(\theta)$  si parametrizza con  $\alpha(\theta) = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ . Mostrare che

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

**Esercizio 1.7:** ●● <sup>S</sup>

Sia  $\alpha$  una curva regolare piana tale che tutte le rette normali passino per uno stesso punto  $p$ . Dimostrare che la traccia di  $\alpha$  è contenuta in una circonferenza di centro  $p$ .

**Esercizio 1.8:** ●● <sup>S</sup>

Sia  $\alpha$  parametrizzata per lunghezza d'arco con  $\kappa \neq 0$  e  $\beta = \alpha + N/\kappa$  la sua evoluta. Mostrare che  $\beta' = -(\kappa'/\kappa^2)N$ : dove  $\kappa' \neq 0$ , la tangente all'evoluta è la normale alla curva. Dedurre che l'evoluta della parabola  $y = x^2$  è  $\beta(x) = (-4x^3, 3x^2 + \frac{1}{2})$ .

**Esercizio 1.9:** ●● <sup>S</sup>

Calcolare l'indice di rotazione del limaçon  $r = 1 + 2 \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  usando l'Esercizio 1.6, e quello della curva  $(\cos t, \sin t \cos t)$ .

**Esercizio 1.10:** ●●● <sup>S</sup>

Sia  $\alpha$  parametrizzata per lunghezza d'arco, con  $\kappa > 0$  e  $\kappa' > 0$  su  $[s_1, s_2]$ . Siano  $D_1, D_2$  i dischi (chiusi) osculatori in  $s_1$  e  $s_2$ . Mostrare che  $D_2 \subset D_1$ .

(teorema di Tait–Kneser nel caso locale). *Suggerimento:* la distanza fra i centri non supera la lunghezza dell’arco di evoluta che li congiunge (Esercizio 1.8).

# 2

## Curve nello spazio

Nello spazio una curva può piegarsi in due modi indipendenti: può *curvare* (cambiare direzione) e può *torcersi* (uscire dal piano su cui sta curvando, come fa una vite). Le due quantità, curvatura e torsione, determinano la curva a meno di movimenti rigidi.

### 2.1 Riferimento di Frenet e torsione

Sia  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzata per lunghezza d'arco e  $T = \alpha'$ . Come nel piano,  $\langle T', T \rangle = 0$ . Definiamo la *curvatura*  $\kappa = \|T'\| \geq 0$ . D'ora in poi supponiamo  $\kappa > 0$  ovunque (la curva è *biregolare*); allora

$$N = \frac{T'}{\kappa} \text{ (normale principale),} \quad B = T \times N \text{ (binormale)}$$

formano insieme a  $T$  una base ortonormale positiva  $(T, N, B)$ : è il *riferimento di Frenet*. Per costruzione  $T' = \kappa N$ .

#### Proposizione 2.1: Equazioni di Frenet–Serret

*Esiste una funzione differenziabile  $\tau$ , detta torsione, tale che*

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N. \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Poiché  $(T, N, B)$  è una base ortonormale,  $B'$  è determinato dai tre prodotti scalari  $\langle B', T \rangle$ ,  $\langle B', N \rangle$ ,  $\langle B', B \rangle$ . Si ha  $\langle B', B \rangle = 0$  (norma costante) e  $\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\kappa \langle B, N \rangle = 0$ . Quindi  $B'$  è parallelo a  $N$ : definiamo  $\tau$  da  $B' = \tau N$ , cioè  $\tau = \langle B', N \rangle$ . Poi  $\langle N', N \rangle = 0$ ,  $\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\kappa$ ,  $\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau$ . ■

In forma matriciale, se  $F = (T | N | B)$  è la matrice  $3 \times 3$  con queste colonne,

$$F' = F K, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad K^T = -K. \quad (2.2)$$

### Per capire

$\kappa$  misura quanto  $T$  ruota *verso*  $N$ ;  $\tau$  misura quanto il piano  $(T, N)$  ruota attorno a  $T$ , cioè quanto  $B$  si inclina. Se  $\tau = 0$  il piano non ruota: la curva sta in un piano (Proposizione 2.2). Il segno di  $\tau$  distingue le eliche destrorse ( $\tau > 0$ ) da quelle sinistrorse ( $\tau < 0$ ): è una proprietà che non cambia se si inverte il verso di percorrenza (Esercizio 2.1), ma cambia con una riflessione dello spazio.

I tre piani coordinati del riferimento hanno un nome: il piano  $\langle T, N \rangle$  è il *piano osculatore*,  $\langle N, B \rangle$  il *piano normale*,  $\langle T, B \rangle$  il *piano rettificante*.

### Proposizione 2.2: Curve piane

*Una curva biregolare è contenuta in un piano se e solo se  $\tau \equiv 0$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\tau \equiv 0$ , allora  $B' = 0$ , quindi  $B$  è un vettore costante. Poiché  $\frac{d}{ds} \langle \alpha, B \rangle = \langle T, B \rangle = 0$ , la funzione  $\langle \alpha, B \rangle$  è costante: la curva giace nel piano  $\{x : \langle x, B \rangle = \text{cost}\}$ . Viceversa, se  $\alpha$  giace in un piano di normale unitaria  $u$ , allora  $\langle T, u \rangle = 0$  e, derivando,  $\langle N, u \rangle = 0$ ; quindi  $u = \pm B$  è costante e  $B' = 0$ . ■

## 2.2 Formule in un parametro qualunque

### Proposizione 2.3: Curvatura e torsione

*Se  $\alpha$  è una curva regolare qualunque con  $\alpha' \times \alpha'' \neq 0$ , allora*

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

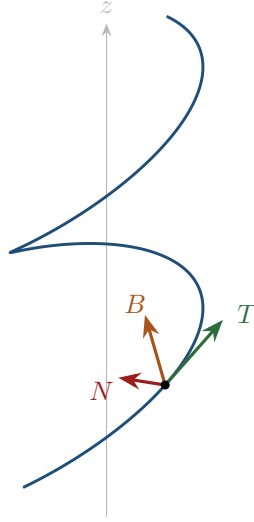


**Figura 2.1.** Elica circolare con il riferimento di Frenet  $(T, N, B)$ .  $N$  punta sempre verso l'asse,  $B$  è inclinato.

*Dimostrazione.* Sia  $v = \|\alpha'\|$  e  $'$  la derivata in  $t$ ; ricordiamo che  $d/dt = v d/ds$ . Da  $\alpha' = vT$  si ottiene

$$\alpha'' = v'T + v^2\kappa N, \quad \alpha''' = (v'' - v^3\kappa^2)T + (3vv'\kappa + v^3\kappa')N + v^3\kappa\tau B,$$

dove  $\kappa'$  è derivata rispetto a  $s$  e abbiamo usato (2.1). Le componenti su  $T$  e  $N$  di  $\alpha'''$  non serviranno. Ora  $\alpha' \times \alpha'' = vT \times (v'T + v^2\kappa N) = v^3\kappa B$ , da cui  $\|\alpha' \times \alpha''\| = v^3\kappa$  (e  $\kappa > 0$ ). Infine  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = v^3\kappa \cdot v^3\kappa\tau = \kappa^2\tau v^6 = \tau \|\alpha' \times \alpha''\|^2$ . ■

#### Esempio 2.4: L'elica circolare

Sia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  con  $a > 0$ ,  $b \neq 0$ . Poniamo  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Allora  $\alpha' = (-a \sin t, a \cos t, b)$ ,  $\alpha'' = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$ ,  $\alpha''' = (a \sin t, -a \cos t, 0)$ ,  $\|\alpha'\| = c$  e  $\alpha' \times \alpha'' = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$ , di norma  $ac$ . Inoltre  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = a^2b$ . Dunque

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

entrambe *costanti*. Per  $b = 0$  si ritrova la circonferenza ( $\kappa = 1/a$ ,  $\tau = 0$ ). Il rapporto  $\tau/\kappa = b/a$  misura quanto è «ripida» la vite.

**Esempio 2.5: La cubica gobba**

$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$  ha  $\alpha' = (1, 2t, 3t^2)$ ,  $\alpha'' = (0, 2, 6t)$ ,  $\alpha''' = (0, 0, 6)$ , e  $\alpha' \times \alpha'' = (6t^2, -6t, 2)$ . In  $t = 0$ :  $\kappa = 2$  e  $\tau = \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') / \|\alpha' \times \alpha''\|^2 = 12/4 = 3$ . (In generale  $\tau(t) = 3/(1 + 9t^2 + 9t^4)$ : Esercizio 2.2.)

## 2.3 Il teorema fondamentale delle curve nello spazio

**Teorema 2.6: Fondamentale delle curve nello spazio**

*Siano  $\kappa > 0$  e  $\tau$  funzioni differenziabili su un intervallo  $I$ . Esiste una curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzata per lunghezza d'arco con curvatura  $\kappa$  e torsione  $\tau$ . Se  $\beta$  è un'altra curva con le stesse proprietà, esiste un'isometria propria  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^3$  con  $\beta = \Phi \circ \alpha$ .*

*Dimostrazione. Esistenza.* Fissiamo  $s_0 \in I$ . Per il Teorema 0.5 il problema  $F' = FK$ ,  $F(s_0) = \text{Id}$  (con  $K$  come in (2.2)) ha un'unica soluzione su tutto  $I$ . Mostriamo che  $F(s)$  è sempre ortogonale con determinante 1. Sia  $G = F^T F$ . Allora  $G' = K^T F^T F + F^T FK = -KG + GK$ . Anche la matrice costante  $\text{Id}$  risolve  $G' = GK - KG$  e  $G(s_0) = \text{Id}$ ; per unicità  $G \equiv \text{Id}$ , cioè  $F^T F = \text{Id}$ . Allora  $\det F = \pm 1$ , è continuo e vale 1 in  $s_0$ , quindi  $\det F \equiv 1$ . Siano  $T, N, B$  le colonne di  $F$  e  $\alpha(s) = \int_{s_0}^s T(u) du$ . Allora  $\alpha' = T$  ha norma 1,  $\alpha'' = T' = \kappa N$ , quindi la curvatura è  $\kappa > 0$  con normale  $N$ ; la binormale è  $T \times N = B$  (perché  $F \in SO(3)$ ) e la terza equazione di (2.2) dice  $B' = -\tau N$ , cioè la torsione è  $\tau$ .

*Unicità.* Siano  $F_\alpha, F_\beta$  i riferimenti di Frenet delle due curve: entrambi risolvono  $Y' = YK$ . Sia  $M = F_\beta(s_0)F_\alpha(s_0)^{-1}$ , matrice ortogonale con  $\det M = 1$ . Poiché  $MF_\alpha$  risolve la stessa equazione con lo stesso valore iniziale,  $F_\beta = MF_\alpha$ . Allora  $\beta' = T_\beta = MT_\alpha = (M\alpha)'$  e  $\beta = M\alpha + b$ . ■

**Proposizione 2.7: Curve a curvatura e torsione costanti**

*Se  $\kappa > 0$  e  $\tau$  sono costanti, la curva è (a meno di isometrie proprie) l'elica circolare  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , riparametrizzata per lunghezza d'arco, con  $a = \kappa/(\kappa^2 + \tau^2)$  e  $b = \tau/(\kappa^2 + \tau^2)$ .*

*Dimostrazione.* Con tali  $a, b$  l'Esempio 2.4 dà  $\kappa_{\text{elica}} = a/(a^2 + b^2)$ ; poiché  $a^2 + b^2 = (\kappa^2 + \tau^2)/(\kappa^2 + \tau^2)^2 = 1/(\kappa^2 + \tau^2)$  si ottiene  $\kappa$ , e analogamente  $\tau$ . Si conclude con l'unicità del Teorema 2.6. ■

## 2.4 Eliche generalizzate

### Proposizione 2.8: Teorema di Lancret

*Sia  $\alpha$  biregolare. La tangente  $T$  forma un angolo costante con una direzione fissa  $u$  se e solo se  $\tau/\kappa$  è costante.*

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Sia  $u$  unitario con  $\langle T, u \rangle = \cos \varphi$  costante. Derivando,  $\kappa \langle N, u \rangle = 0$ , quindi  $\langle N, u \rangle = 0$  e  $u = \cos \varphi T + \beta B$  con  $\beta = \langle B, u \rangle$ . Derivando  $\langle N, u \rangle = 0$ :  $-\kappa \langle T, u \rangle + \tau \langle B, u \rangle = 0$ , cioè  $\tau \beta = \kappa \cos \varphi$ . Se fosse  $\beta = 0$  si avrebbe  $\cos \varphi = \pm 1$ ,  $T = \pm u$  costante e  $\kappa = 0$ : assurdo. Quindi  $\beta \neq 0$  ed è costante (da  $\cos^2 \varphi + \beta^2 = 1$  e continuità);  $\tau/\kappa = \cos \varphi / \beta$  è costante. ( $\Leftarrow$ ) Sia  $\tau/\kappa = \cot \varphi$  con  $\varphi \in (0, \pi)$  e  $u = \cos \varphi T + \sin \varphi B$ . Allora  $u' = (\kappa \cos \varphi - \tau \sin \varphi)N = 0$ , quindi  $u$  è un vettore costante e  $\langle T, u \rangle = \cos \varphi$ . ■

## 2.5 Sviluppo locale della curva

Per capire geometricamente  $\kappa$  e  $\tau$ , sviluppiamo  $\alpha$  in serie di Taylor in  $s_0 = 0$  usando le equazioni di Frenet:  $\alpha' = T$ ,  $\alpha'' = \kappa N$ ,  $\alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)$ . Quindi

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)T + \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6}\right)N + \frac{\kappa \tau s^3}{6}B + o(s^3), \quad (2.3)$$

con  $T, N, B, \kappa, \tau$  calcolati in 0. Alla luce di (2.3): la proiezione sul piano osculatore è, al secondo ordine, una parabola  $n = \frac{\kappa}{2}t^2$ ; la componente lungo  $B$  è  $\frac{\kappa \tau}{6}s^3$ , che cambia segno con  $s$ : se  $\tau \neq 0$  la curva *attraversa* il piano osculatore.

### In sintesi

- Per  $\kappa > 0$ : riferimento  $(T, N, B)$  con  $T' = \kappa N$ ,  $N' = -\kappa T + \tau B$ ,  $B' = -\tau N$ .
- $\kappa = \|\alpha' \times \alpha''\|/\|\alpha'\|^3$ ,  $\tau = \det(\alpha', \alpha'', \alpha''')/\|\alpha' \times \alpha''\|^2$  in un parametro

qualunque.

- $\tau \equiv 0$  se e solo se la curva è piana;  $\kappa, \tau$  costanti se e solo se è un'elica circolare.
- $(\kappa, \tau)$  determinano la curva a meno di isometrie proprie (Teorema 2.6).

## 2.6 Esercizi

### Esercizio 2.1: ●<sup>S</sup>

Sia  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(-s)$  la curva percorsa in senso opposto. Mostrare che  $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(-s)$  e  $\tilde{\tau}(s) = \tau(-s)$ . Come cambiano  $N$  e  $B$ ? E se si riflette  $\alpha$  rispetto al piano  $z = 0$ ?

### Esercizio 2.2: ●●<sup>S</sup>

Per la cubica gobba  $(t, t^2, t^3)$  mostrare che  $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$  e  $\tau(t) = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}$ .

### Esercizio 2.3: ●●<sup>S</sup>

Calcolare curvatura e torsione di  $\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$  e verificare che  $\tau/\kappa$  è costante. Che angolo forma  $T$  con l'asse  $z$ ?

### Esercizio 2.4: ●●<sup>S</sup>

Dedurre (2.3) dalle equazioni di Frenet. Se  $\kappa \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$ , in  $s = 0$ , descrivere la forma delle proiezioni della curva sul piano osculatore, rettificante e normale.

**Esercizio 2.5:** ●●●<sup>S</sup>

Sia  $\alpha$  parametrizzata per lunghezza d'arco, con  $\kappa > 0$ ,  $\tau \neq 0$ , contenuta in una sfera di raggio  $R$  e centro  $c$ . Mostrare che

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{(1/\kappa)'}{\tau}\right)^2 = R^2.$$

**Esercizio 2.6:** ●●

Per l'elica  $(a \cos t, a \sin t, bt)$  determinare l'angolo  $\varphi$  fra  $T$  e l'asse  $z$  in funzione di  $a, b$  e verificare il Teorema di Lancret.

# 3

## Superfici regolari e prima forma fondamentale

---

Una superficie è, localmente, un pezzo di piano deformato. Le curve si descrivono con un parametro; per le superfici ne servono due. In questo capitolo diciamo che cosa significa «superficie liscia», definiamo il piano tangente e introduciamo la *prima forma fondamentale*, lo strumento con cui un abitante della superficie misura lunghezze, angoli e aree senza uscire da essa.

### 3.1 Superfici regolari

#### Definizione 3.1: Superficie regolare

Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una *superficie regolare* se per ogni  $p \in S$  esistono un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , un intorno  $V$  di  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  e un'applicazione  $X: U \rightarrow V \cap S$  tali che:

- (a)  $X$  è differenziabile (di classe  $C^\infty$ );
- (b)  $X$  è un omeomorfismo su  $V \cap S$  (è biunivoca, continua, con inversa continua);
- (c) per ogni  $q \in U$  il differenziale  $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è iniettivo, cioè i vettori  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  sono linearmente indipendenti.

$X$  si dice *parametrizzazione* (o carta locale) di  $S$  attorno a  $p$ .

La condizione (3) è l'analogo della regolarità delle curve: serve ad avere un piano tangente. La (2) esclude, per esempio, le superfici che si auto-interse-

cano.

### Esempio 3.2: Esempi fondamentali

- (a) *Piano*:  $X(u, v) = p + ua + vb$  con  $a, b$  indipendenti.
- (b) *Grafico* di una funzione differenziabile  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ :  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Si ha  $X_u = (1, 0, f_u)$ ,  $X_v = (0, 1, f_v)$ , mai paralleli. La proiezione  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  è l'inversa continua.
- (c) *Sfera* di raggio  $R$ :  $X(\theta, \varphi) = R(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  con  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  copre la sfera meno un meridiano; con una seconda parametrizzazione si copre il resto.
- (d) *Superficie di rotazione*: se  $(f(v), g(v))$  con  $f > 0$  è una curva regolare del piano  $xz$  (iniettiva),  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ . Ne sono casi particolari il cilindro ( $f = R$ ,  $g = v$ ) e il toro  $X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$ , con  $R > r > 0$ .
- (e) *Elicoide*:  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ ,  $b \neq 0$ , e *catenoide*:  $X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ .

Il cono  $\{x^2 + y^2 = z^2\}$  non è una superficie regolare nel vertice (la regolarità fallisce proprio lì); il cono privato del vertice sì.

Spesso una superficie è data come insieme di livello. Il risultato seguente, conseguenza del teorema della funzione implicita, copre sfera, toro, ellissoide, iperboloidi...

### Proposizione 3.3: Insiemi di livello

*Sia  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile ( $W \subset \mathbb{R}^3$  aperto) e  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(p) \neq 0$  per ogni  $p$  con  $f(p) = a$ . Allora  $S = f^{-1}(a)$  è una superficie regolare.*

*Dimostrazione.* Sia  $p \in S$ ; a meno di scambiare le coordinate  $\partial f / \partial z(p) \neq 0$ . Per il Teorema 0.3 vicino a  $p$  l'insieme  $S$  è il grafico  $z = h(x, y)$  di una funzione differenziabile, e i grafici sono superfici regolari (Esempio 3.2). ■

Per lavorare con più parametrizzazioni serve sapere che il cambio di carta è liscio.

**Proposizione 3.4: Cambio di parametri**

Siano  $X: U \rightarrow S$  e  $Y: \tilde{U} \rightarrow S$  due parametrizzazioni con  $W = X(U) \cap Y(\tilde{U}) \neq \emptyset$ . Allora  $h = X^{-1} \circ Y: Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  è un diffeomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia  $r \in Y^{-1}(W)$  e  $q = h(r)$ . Poiché  $X_u, X_v$  sono indipendenti, una delle minori  $2 \times 2$  della matrice jacobiana di  $X$ , diciamo quella delle prime due coordinate  $(X_1, X_2)$ , ha determinante  $\neq 0$  in  $q$ . Per il teorema della funzione inversa  $\pi \circ X$  (con  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ) è un diffeomorfismo tra un intorno di  $q$  e un aperto del piano. Vicino a  $r$ ,  $h = (\pi \circ X)^{-1} \circ (\pi \circ Y)$  (infatti se  $X(q') = Y(r')$  allora  $\pi X(q') = \pi Y(r')$  e la restrizione è iniettiva), composizione di funzioni differenziabili. Lo stesso vale per  $h^{-1}$ . ■

Quindi le nozioni definite tramite una parametrizzazione e invarianti per diffeomorfismi dei parametri sono ben definite sulla superficie.

## 3.2 Piano tangente e normale

**Definizione 3.5: Piano tangente**

Sia  $X$  una parametrizzazione attorno a  $p = X(q)$ . Il *piano tangente* è  $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{X_u(q), X_v(q)\}$ , un sottospazio di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^3$ .

Non dipende dalla parametrizzazione:  $T_p S$  è l'insieme dei vettori velocità  $\alpha'(0)$  di tutte le curve differenziabili  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  con  $\alpha(0) = p$ . Infatti una tale curva si scrive  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  (con  $(u, v) = X^{-1} \circ \alpha$  differenziabile per la Proposizione 3.4, applicata a una parametrizzazione che contenga  $\alpha$ ) e  $\alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$ ; viceversa ogni  $aX_u + bX_v$  è la velocità della curva  $t \mapsto X(q + t(a, b))$ .

Il vettore *normale unitario* associato alla parametrizzazione è

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

ortogonale a  $T_p S$ , ben definito perché  $X_u \times X_v \neq 0$ . Cambiando parametrizzazione  $N$  può cambiare segno (per il segno del determinante jacobiano di

$h$ ); una superficie dotata di una scelta continua di  $N$  si dice *orientabile* (il nastro di Möbius no). Noi lavoreremo sempre in una carta, dove  $N$  è fissato dalla formula sopra.

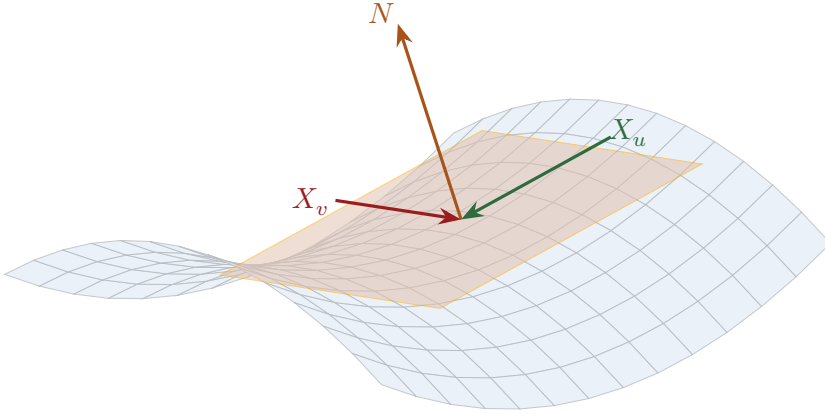


**Figura 3.1.** Piano tangente in un punto del grafico  $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$ , con i vettori coordinati  $X_u, X_v$  e la normale  $N$  (disegno non in scala).

### 3.3 La prima forma fondamentale

#### Definizione 3.6: Prima forma fondamentale

La *prima forma fondamentale* di  $S$  in  $p$  è la forma quadratica  $I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$ . Nella carta  $X$  e con  $w = aX_u + bX_v$ :

$$I_p(w) = E a^2 + 2F ab + G b^2,$$

dove  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ,  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  (calcolati in  $q$ ).

È la restrizione del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$  al piano tangente: contiene tutta l'informazione *metrica* (intrinseca) della superficie. Per l'identità di Lagrange (0.1)

$$EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0. \quad (3.1)$$

**Proposizione 3.7: Lunghezze, angoli, aree**

Sia  $X: U \rightarrow S$  una carta.

- (a) La lunghezza di  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , è  $\int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2} dt$ .
- (b) L'angolo  $\vartheta$  tra le curve coordinate  $v = \text{cost}$  e  $u = \text{cost}$  soddisfa  $\cos \vartheta = F/\sqrt{EG}$ ; sono ortogonali se e solo se  $F = 0$ .
- (c) L'area di una regione  $R = X(Q)$ ,  $Q \subset U$  compatta, è  $\text{Area}(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv$ , e non dipende dalla parametrizzazione scelta.

*Dimostrazione.* (1)  $\alpha' = u'X_u + v'X_v$ , quindi  $\|\alpha'\|^2 = I(\alpha') = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$ . (2) è la definizione di angolo applicata a  $X_u, X_v$ . (3) L'area dell'immagine del rettangolino  $[u, u+du] \times [v, v+dv]$  è, al primo ordine, quella del parallelogramma di lati  $X_u du, X_v dv$ , cioè  $\|X_u \times X_v\| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$  per (3.1): ecco perché si *definisce* l'area come l'integrale. Se  $Y = X \circ h$  è un'altra carta, con  $h(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$ , si ha  $Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}} = \det(J_h)(X_u \times X_v) \circ h$  (regola della catena e proprietà del prodotto vettoriale), quindi per il cambio di variabili  $\iint \|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \iint \|X_u \times X_v\| \circ h |\det J_h| d\tilde{u}d\tilde{v} = \iint \|X_u \times X_v\| dudv$ . ■

**Per capire**

Un insetto che vive sulla superficie, e non sa nulla dello spazio che la contiene, può misurare con un righello tutte le lunghezze di curve e quindi calcolare  $E, F, G$  nella sua carta. Quindi tutto ciò che si esprime con  $E, F, G$  e le loro derivate è *intrinseco*. Il Capitolo 5 mostrerà un fatto sorprendente: la curvatura di Gauss è intrinseca, anche se la definiremo con la seconda forma fondamentale, che dipende dall'immersione.

**Esempio 3.8: Calcoli di  $E, F, G$** 

- (a) Piano  $X(u, v) = p + ua + vb$  con  $a, b$  ortonormali:  $E = G = 1, F = 0$ .
- (b) Grafico  $z = f(x, y)$ :  $E = 1 + f_x^2, F = f_x f_y, G = 1 + f_y^2, EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$ , quindi  $\text{Area} = \iint \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy$ .
- (c) Sfera di raggio  $R$  con  $X(\theta, \varphi)$  come sopra:  $X_\theta = R(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$ ,  $X_\varphi = R(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$ , dunque  $E = R^2, F = 0, G = R^2 \sin^2 \theta$  e  $\text{Area} =$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

- (d) *Superficie di rotazione*  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ :  $E = f(v)^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = f'(v)^2 + g'(v)^2$ .
- (e) *Toro*:  $E = (R + r \cos v)^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = r^2$ ;  $\text{Area} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos v) \, du dv = 4\pi^2 Rr$ .
- (f) *Elicoide*:  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = u^2 + b^2$ . *Catenoide*:  $E = G = \cosh^2 v$ ,  $F = 0$ .

### 3.4 Isometrie locali

#### Definizione 3.9: Isometria locale

Un diffeomorfismo  $\phi: S \rightarrow \tilde{S}$  tra (aperti di) superfici è un'*isometria* se conserva la prima forma fondamentale:  $I_{\phi(p)}(d\phi_p w) = I_p(w)$  per ogni  $p$  e  $w \in T_p S$ , ossia se conserva le lunghezze delle curve. Due superfici sono *localmente isometriche* se ogni punto di  $S$  ha un intorno isometrico a un aperto di  $\tilde{S}$ .

#### Proposizione 3.10: Criterio per carte

Se  $X: U \rightarrow S$  e  $\tilde{X}: U \rightarrow \tilde{S}$  sono carte sullo stesso aperto  $U$  con  $E = \tilde{E}$ ,  $F = \tilde{F}$ ,  $G = \tilde{G}$ , allora  $\phi = \tilde{X} \circ X^{-1}: X(U) \rightarrow \tilde{X}(U)$  è un'*isometria*.

*Dimostrazione.* Per  $w = aX_u + bX_v$  si ha  $d\phi(w) = a\tilde{X}_u + b\tilde{X}_v$ , quindi  $I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = \tilde{I}(d\phi w)$ . ■

#### Esempio 3.11: Cilindro e piano

Il cilindro  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $u \in (0, 2\pi)$ , ha  $E = G = 1$ ,  $F = 0$ , come il piano  $\tilde{X}(u, v) = (u, v, 0)$ . Per il criterio sono localmente isometriche: si può «srotolare» un cilindro senza stirarlo né strapparlo, come un foglio di carta. Lo stesso accade per il cono (Esercizio 3.5). Invece la sfera non è localmente isometrica a nessun piano (Capitolo 5): non

esistono carte geografiche perfette.

#### In sintesi

- Una superficie regolare ha in ogni punto un piano tangente  $\text{span}\{X_u, X_v\}$  e (in una carta) una normale  $N = X_u \times X_v / \|X_u \times X_v\|$ .
- $I = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$  determina lunghezze, angoli e aree:  $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$ .
- Superfici con la stessa  $I$  nelle stesse coordinate sono localmente isometriche (cilindro e cono si srotolano nel piano).

## 3.5 Esercizi

### Esercizio 3.1: • <sup>S</sup>

Mostrare che il toro  $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$  ( $R > r > 0$ ) è una superficie regolare usando la Proposizione 3.3.

### Esercizio 3.2: • <sup>S</sup>

Calcolare l'area della porzione di paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

### Esercizio 3.3: • <sup>S</sup>

Per l'elicoide con  $b = 1$ , calcolare l'area di  $\{0 < u < 1, 0 < v < 2\pi\}$ .

### Esercizio 3.4: •• <sup>S</sup>

La parametrizzazione  $X(u, v) = \frac{(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1}$  copre la sfera unitaria meno il polo nord (proiezione stereografica inversa). Mostrare che  $E = G = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}$  e  $F = 0$ : gli angoli sono conservati, ma le lunghezze no.

**Esercizio 3.5:** ●● <sup>S</sup>

Mostrare che il cono  $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ ,  $v > 0$ , è localmente isometrico al piano. *Suggerimento:* confrontare con le coordinate polari  $(\rho, \vartheta) = (\sqrt{2}v, u/\sqrt{2})$  del piano.

**Esercizio 3.6:** ●● <sup>S</sup>

Sulla sfera unitaria con  $(\theta, \varphi)$  come nell'Esempio 3.8, si ponga  $w = \ln \cot(\theta/2)$ . Mostrare che  $I = \sin^2 \theta (d\varphi^2 + dw^2)$  (proiezione di Mercator) e dedurre che le curve che tagliano i meridiani con angolo costante diventano rette nella carta  $(\varphi, w)$ .

**Esercizio 3.7:** ●●

Mostrare che con la sostituzione  $u = \sinh w$  l'elicoide con  $b = 1$  ha  $E = \cosh^2 w$ ,  $F = 0$ ,  $G = \cosh^2 w$  in coordinate  $(w, v)$ ; confrontare con il catenoide (Esempio 3.8). Dedurre che i due sono localmente isometrici.

**Esercizio 3.8:** ●●●

Dimostrare che l'area della superficie di rotazione generata da  $v \mapsto (f(v), g(v))$  (curva parametrizzata per lunghezza d'arco,  $v \in [a, b]$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ) è  $2\pi \int_a^b f(v) dv$ , e ritrovare l'area della sfera di raggio  $R$ .

# 4

## Curvatura delle superfici

---

La prima forma fondamentale misura la geometria *interna* della superficie, ma non distingue un foglio piano da un cilindro. Per descrivere come la superficie si piega nello spazio serve un secondo oggetto: la seconda forma fondamentale, che misura quanto il vettore normale  $N$  cambia da punto a punto.

### 4.1 La mappa di Gauss e l'operatore forma

Sia  $X: U \rightarrow S$  una carta e  $N = X_u \times X_v / \|X_u \times X_v\|$ . Poiché  $\langle N, N \rangle = 1$ , derivando  $\langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0$ : le derivate di  $N$  sono tangenti a  $S$ . Quindi il differenziale della *mappa di Gauss*  $N: U \rightarrow S^2$  manda  $T_p S$  in sé: è un'applicazione lineare  $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ , con  $dN_p(X_u) = N_u$  e  $dN_p(X_v) = N_v$ .

#### Definizione 4.1: Operatore forma

L'*operatore forma* è  $A_p = -dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ . La *seconda forma fondamentale* è la forma quadratica  $\Pi_p(w) = \langle A_p w, w \rangle$ . I suoi coefficienti nella carta  $X$  sono

$$\ell = \langle N, X_{uu} \rangle, \quad m = \langle N, X_{uv} \rangle, \quad n = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

(La Proposizione 4.2 giustifica le formule.) Il segno « $-$ » nella definizione è una convenzione (la stessa di do Carmo); scambiare  $N$  con  $-N$  cambia il segno di  $A$  e di  $\Pi$ .

**Proposizione 4.2: L'operatore forma è autoaggiunto**

$A_p$  è simmetrico:  $\langle A_p w, z \rangle = \langle w, A_p z \rangle$ . Inoltre  $\ell = \langle AX_u, X_u \rangle$ ,  $m = \langle AX_u, X_v \rangle = \langle X_u, AX_v \rangle$ ,  $n = \langle AX_v, X_v \rangle$ .

*Dimostrazione.* Da  $\langle N, X_u \rangle = 0$  e  $\langle N, X_v \rangle = 0$ , derivando rispettivamente in  $u$  e  $v$ :

$$\begin{aligned}\langle N_u, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uu} \rangle = -\ell, & \langle N_v, X_v \rangle &= -\langle N, X_{vv} \rangle = -n, \\ \langle N_u, X_v \rangle &= -\langle N, X_{uv} \rangle = -m = \langle N_v, X_u \rangle.\end{aligned}$$

Quindi  $\langle AX_u, X_u \rangle = \ell$ ,  $\langle AX_u, X_v \rangle = m = \langle X_u, AX_v \rangle$ ,  $\langle AX_v, X_v \rangle = n$ . La simmetria sulla base  $\{X_u, X_v\}$  implica quella su tutto  $T_p S$  per bilinearità. ■

Per il teorema spettrale esiste una base ortonormale  $\{e_1, e_2\}$  di  $T_p S$  di autovettori:  $Ae_i = k_i e_i$ . I numeri  $k_1 \geq k_2$  sono le *curvature principali*, le direzioni  $e_i$  le *direzioni principali*.

**Definizione 4.3: Curvatura di Gauss e curvatura media**

$K = \det A_p = k_1 k_2$  è la *curvatura di Gauss*;  $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_p = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  è la *curvatura media*.

**Attenzione**

Cambiando  $N$  in  $-N$ ,  $k_1, k_2$  e  $H$  cambiano segno, ma  $K = k_1 k_2$  no: la curvatura di Gauss non dipende dall'orientazione.

## 4.2 Curvatura normale: Meusnier ed Eulero

Sia  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  parametrizzata per lunghezza d'arco,  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . L'accelerazione  $\alpha''$  si scompone in una parte tangente alla superficie e una parte lungo  $N$ ; la *curvatura normale* è  $\kappa_n = \langle \alpha'', N \rangle$ .

**Proposizione 4.4: Meusnier**

Per ogni curva  $\alpha$  su  $S$  parametrizzata per lunghezza d'arco con  $\alpha'(0) = w$ ,

$$\kappa_n = \langle \alpha''(0), N \rangle = \Pi_p(w) = \kappa \cos \varphi,$$

dove  $\kappa$  è la curvatura di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}^3$  e  $\varphi$  l'angolo tra la normale principale di  $\alpha$  e  $N$ . In particolare  $\kappa_n$  dipende solo da  $p$  e da  $w$ .

*Dimostrazione.* Da  $\langle \alpha', N \circ \alpha \rangle = 0$ , derivando:  $\langle \alpha'', N \rangle = -\langle \alpha', (N \circ \alpha)' \rangle = -\langle \alpha', dN(\alpha') \rangle = \langle A\alpha', \alpha' \rangle = \Pi(w)$ . Inoltre  $\alpha'' = \kappa N_\alpha$  (normale principale), da cui  $\langle \alpha'', N \rangle = \kappa \cos \varphi$ . ■

**Per capire**

Tagliamo la superficie con il piano generato da  $w$  e  $N$ : la curva ottenuta (*sezione normale*) ha  $\varphi = 0$  e quindi curvatura  $|\Pi(w)|$ . Qualunque altra curva con la stessa tangente  $w$  ha curvatura *maggiore o uguale*, perché  $\cos \varphi \leq 1$ : la parte normale dell'accelerazione è un'informazione della superficie, il resto dipende dalla curva.

**Teorema 4.5: Formula di Eulero**

Se  $w = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  è un vettore unitario, allora  $\Pi_p(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$ . In particolare  $k_1$  e  $k_2$  sono il massimo e il minimo della curvatura normale.

*Dimostrazione.*  $Aw = k_1 \cos \theta e_1 + k_2 \sin \theta e_2$ ; si prende il prodotto scalare con  $w$  e si usa l'ortonormalità di  $e_1, e_2$ . Poiché  $k_2 \leq k_1$ ,  $\Pi(w) = k_2 + (k_1 - k_2) \cos^2 \theta \in [k_2, k_1]$ . ■

**Definizione 4.6: Tipi di punti**

Un punto  $p$  è *ellittico* se  $K > 0$  (le curvature principali hanno lo stesso segno), *iperbolico* se  $K < 0$  (segni opposti), *parabolico* se  $K = 0$  ma  $A \neq 0$ , *planare* se  $A = 0$ ; è *ombelicale* se  $k_1 = k_2$  (ogni direzione è principale).

### 4.3 Formule in coordinate

#### Teorema 4.7: Calcolo di $K$ e $H$

Con  $E, F, G$  e  $\ell, m, n$  della carta  $X$ ,

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{En - 2Fm + G\ell}{2(EG - F^2)}.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo  $AX_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ ,  $AX_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$ , ossia la matrice di  $A$  nella base  $\{X_u, X_v\}$  è  $\mathcal{A} = (a_{ij})$ . Facendo il prodotto scalare di  $AX_j$  con  $X_i$  e usando la Proposizione 4.2 si ottiene  $\sum_k a_{kj} \langle X_k, X_i \rangle = \langle AX_j, X_i \rangle$ , cioè

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \implies \mathcal{A} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Il determinante è  $\det \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} / (EG - F^2)$ , e la traccia è  $(G\ell - Fm - Fm + En) / (EG - F^2)$ ; si divide per 2 per ottenere  $H$ . ■

#### Proposizione 4.8: Grafici

Per il grafico  $z = f(x, y)$ , con  $W = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$  e normale  $N = (-f_x, -f_y, 1)/W$ ,

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{W^4}, \quad H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2W^3}.$$

*Dimostrazione.* Con  $X = (x, y, f)$ :  $X_{xx} = (0, 0, f_{xx})$ , ecc., quindi  $\ell = f_{xx}/W$ ,  $m = f_{xy}/W$ ,  $n = f_{yy}/W$ ; e  $E = 1 + f_x^2$ ,  $F = f_xf_y$ ,  $G = 1 + f_y^2$ ,  $EG - F^2 = W^2$ . Si sostituisce nel Teorema 4.7. ■

#### Teorema 4.9: Superfici di rotazione

Sia  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$  con  $f > 0$  e  $f'^2 + g'^2 = 1$  (profilo parametrizzato per lunghezza d'arco). Allora, con  $N =$

$$(g' \cos u, g' \sin u, -f'),$$

$$K = -\frac{f''}{f}, \quad k_{\text{paralleli}} = -\frac{g'}{f}, \quad k_{\text{meridiani}} = g' f'' - f' g''.$$

*Dimostrazione.* Si ha  $X_u = (-f \sin u, f \cos u, 0)$ ,  $X_v = (f' \cos u, f' \sin u, g')$ ,  $X_u \times X_v = f(g' \cos u, g' \sin u, -f')$ , di norma  $f$  (perché  $f'^2 + g'^2 = 1$ ). Quindi  $E = f^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$  e  $\ell = \langle N, X_{uu} \rangle = -fg'$ ,  $m = \langle N, X_{uv} \rangle = 0$ ,  $n = \langle N, X_{vv} \rangle = g'f'' - f'g''$ . Poiché  $F = m = 0$  la matrice  $\mathcal{A}$  è diagonale, con  $a_{11} = \ell/E = -g'/f$  e  $a_{22} = n$ . Dunque  $K = -g'(g'f'' - f'g'')/f$ . Derivando  $f'^2 + g'^2 = 1$  si ottiene  $f'f'' + g'g'' = 0$ ; allora  $g'(g'f'' - f'g'') = g'^2 f'' - f'g'g'' = g'^2 f'' + f'^2 f'' = f''$ . ■

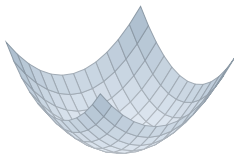
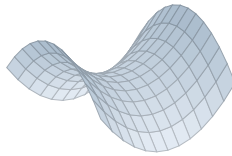
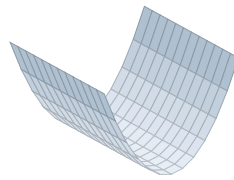
#### Esempio 4.10: Sfera, cilindro, toro, catenoide

- (a) *Sfera* di raggio  $R$  con  $N = X/R$  (esterna):  $dN = \frac{1}{R} \text{Id}$ , quindi  $A = -\frac{1}{R} \text{Id}$ : ogni punto è ombelicale,  $k_1 = k_2 = -1/R$ ,  $K = 1/R^2$ ,  $H = -1/R$ .
- (b) *Cilindro*  $X = (R \cos u, R \sin u, v)$ ,  $N = (\cos u, \sin u, 0)$ :  $N_u = X_u/R$ ,  $N_v = 0$ , quindi  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -1/R$ ,  $K = 0$ . Un cilindro è piatto intrinsecamente (Esempio 3.11) e ha  $K = 0$ : è un indizio del Teorema Egregium.
- (c) *Toro*: il profilo  $(f, g) = (R + r \cos(v/r), r \sin(v/r))$  è parametrizzato per lunghezza d'arco; il Teorema 4.9 dà, in funzione dell'angolo  $\tilde{v} = v/r$ ,

$$K = \frac{\cos \tilde{v}}{r(R + r \cos \tilde{v})}.$$

$K > 0$  sulla parte esterna ( $|\tilde{v}| < \pi/2$ ),  $K < 0$  sulla parte interna ( $|\tilde{v}| > \pi/2$ ),  $K = 0$  sulle due circonferenze  $\tilde{v} = \pm\pi/2$  (parallele «di cresta»). Inoltre  $\iint K dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tilde{v} d\tilde{v} du = 0$ : ritroveremo questa cancellazione con Gauss–Bonnet.

- (d) *Catenoide*  $(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$  con  $N = (\cos u / \cosh v, \sin u / \cosh v, -\tanh v)$ :  $\ell = -1$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$ ,  $E = G = \cosh^2 v$ ; quindi  $K = -1/\cosh^4 v$  e  $H = 0$ . Le superfici con  $H \equiv 0$  si dicono *minime*: localmente minimizzano l'area (sono le forme dei veli di sapone).

ellittico ( $z = x^2 + y^2$ )iperbolico ( $z = x^2 - y^2$ )parabolico ( $z = x^2$ )**Figura 4.1.** L'origine è un punto ellittico, iperbolico, parabolico (da sinistra).

## 4.4 Come è fatta una superficie vicino a un punto

### Proposizione 4.11: Forma locale

Scegliamo coordinate cartesiane con  $p = 0$ ,  $T_p S = \{z = 0\}$ ,  $N(p) = e_3$  e assi  $x, y$  lungo le direzioni principali. Allora, vicino a  $p$ ,  $S$  è il grafico di una funzione  $h$  con

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Di conseguenza: se  $p$  è ellittico,  $S$  sta (localmente) da una sola parte del piano tangente; se  $p$  è iperbolico,  $S$  attraversa il piano tangente.

*Dimostrazione.* Poiché  $T_p S$  è orizzontale, per il Teorema 0.3  $S$  è localmente il grafico di  $h$  con  $h(0) = 0$  e  $\nabla h(0) = 0$ . Per la Proposizione 4.8,  $N = (-h_x, -h_y, 1)/W$ ; in 0 si ha  $W = 1$ ,  $\nabla W = 0$ , quindi  $N_x(0) = (-h_{xx}, -h_{xy}, 0)$ ,  $N_y(0) = (-h_{xy}, -h_{yy}, 0)$ . Dunque la matrice di  $A = -dN$  nella base  $e_1, e_2$  è l'hessiana di  $h$  in 0; per la scelta degli assi è  $\text{diag}(k_1, k_2)$ . Il resto è la formula di Taylor al secondo ordine. Se  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) \geq c(x^2 + y^2)$  con  $c > 0$  e domina  $o(x^2 + y^2)$ :  $h > 0$  nei punti  $\neq 0$  vicini (analogamente se sono entrambe negative). Se  $k_1 k_2 < 0$ ,  $h$  ha segno concorde con  $k_1$  lungo l'asse  $x$  e segno opposto lungo l'asse  $y$  vicino a 0. ■

### Teorema 4.12: Punti ombelicali

Se ogni punto di una superficie regolare connessa è ombelicale, la superficie è contenuta in un piano o in una sfera.

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $dN_p = \lambda(p) \text{Id}$  per un'opportuna funzione  $\lambda$ ; in una carta  $N_u = \lambda X_u$ ,  $N_v = \lambda X_v$ . Derivando la prima rispetto a  $v$  e la seconda rispetto a  $u$  e sottraendo (Schwarz:  $N_{uv} = N_{vu}$ ,  $X_{uv} = X_{vu}$ ):  $0 = \lambda_v X_u - \lambda_u X_v$ . Poiché  $X_u, X_v$  sono indipendenti,  $\lambda_u = \lambda_v = 0$ :  $\lambda$  è localmente costante, quindi costante su  $S$  (connessa). Se  $\lambda = 0$ ,  $N$  è costante e  $\langle X, N \rangle$  ha derivate nulle: la superficie sta in un piano. Se  $\lambda \neq 0$ ,  $(N - \lambda X)_u = (N - \lambda X)_v = 0$ , quindi  $N - \lambda X = -\lambda X_0$  per un punto  $X_0$ , cioè  $X - X_0 = N/\lambda$  e  $\|X - X_0\| = 1/|\lambda|$ : sfera. ■

### In sintesi

- $A = -dN$  è simmetrico;  $\Pi(w) = \langle Aw, w \rangle$  è la curvatura normale delle curve con tangente  $w$  (Meusnier);  $k_1, k_2$  sono massimo e minimo (Eulero).
- $K = k_1 k_2 = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}$  (indipendente dal verso di  $N$ ),  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ .
- Ellittico: da una parte del piano tangente; iperbolico: lo attraversa; sfera e piano sono le uniche superfici totalmente ombelicali.

## 4.5 Esercizi

### Esercizio 4.1: • <sup>S</sup>

In un punto  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = -1$ . Calcolare la curvatura normale nella direzione  $\theta = 60^\circ$  dalla direzione principale  $e_1$  e trovare le direzioni con curvatura normale nulla (*direzioni asintotiche*).

### Esercizio 4.2: • <sup>S</sup>

Calcolare  $K$  e  $H$  del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  in un punto qualunque; mostrare che  $K > 0$  ovunque e determinare  $K(0, 0)$ .

**Esercizio 4.3:** • <sup>S</sup>

Mostrare che la sella  $z = xy$  ha  $K = -1/(1 + x^2 + y^2)^2$  e  $H = -xy/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$ . Dove ha  $H = 0$ ?

**Esercizio 4.4:** • <sup>S</sup>

Mostrare che  $H^2 - K = ((k_1 - k_2)/2)^2 \geq 0$ , con uguaglianza se e solo se il punto è ombelicale. Dedurre che se  $H = 0$  allora  $K \leq 0$ .

**Esercizio 4.5:** •• <sup>S</sup>

Mostrare che l'elicoide  $(u \cos v, u \sin v, bv)$  ha  $H = 0$  e  $K = -b^2/(u^2 + b^2)^2$ .

**Esercizio 4.6:** •• <sup>S</sup>

Verificare con i coefficienti  $E, F, G, \ell, m, n$  del toro (con  $N = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ ) che  $K = \cos v / (r(R + r \cos v))$ , e calcolare l'area della regione del toro dove  $K > 0$ .

**Esercizio 4.7:** •• <sup>S</sup>

La *pseudosfera* è la superficie di rotazione del profilo (*trattrice*)  $f(v) = e^{-v}$ ,  $g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}} dt$ ,  $v \geq 0$ . Verificare che  $f'^2 + g'^2 = 1$  e che  $K \equiv -1$ .

**Esercizio 4.8:** ••• <sup>S</sup>

Dimostrare che una superficie regolare *compatta* (senza bordo) in  $\mathbb{R}^3$  ha almeno un punto ellittico, anzi un punto con  $K \geq 1/R^2$ , dove  $R = \max \|p\|$ . *Suggerimento:* nel punto di massima distanza dall'origine, per ogni curva  $\alpha$  sulla superficie la funzione  $\|\alpha\|^2$  ha un massimo.

# 5

## Geometria intrinseca: Egregium e geodetiche

---

La curvatura di Gauss  $K = k_1 k_2$  è stata definita usando la normale  $N$ , cioè il modo in cui la superficie sta nello spazio. Gauss scoprì che, nonostante questo,  $K$  si può calcolare conoscendo soltanto  $E, F, G$ : è una proprietà *intrinseca*. Lo chiamò *Theorema Egregium*, il «teorema notevole».

### 5.1 I simboli di Christoffel

Sia  $X$  una carta. I tre vettori  $X_u, X_v, N$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$ , quindi le derivate seconde si scrivono in modo unico come

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \ell N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + m N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + n N. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(le componenti lungo  $N$  sono  $\ell, m, n$  per definizione). I coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  sono i *simboli di Christoffel*. Dalla Proposizione 4.2 e dalla definizione di  $A$ , inoltre,  $N_u = -AX_u$ ,  $N_v = -AX_v$  (*formule di Weingarten*).

**Proposizione 5.1: I simboli di Christoffel sono intrinseci**

*I  $\Gamma_{ij}^k$  dipendono solo da  $E, F, G$  e dalle loro derivate: sono soluzioni dei sistemi lineari*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u, & \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2} E_v, & \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2} G_u, & \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v. \end{aligned}$$

*Il determinante di ciascun sistema è  $EG - F^2 \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Facendo il prodotto scalare di (5.1) con  $X_u$  e  $X_v$  (ricordando  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ ) si ottiene, ad esempio,  $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$  e  $\langle X_{uu}, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$ . Ora  $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u$ ;  $\langle X_{uu}, X_v \rangle = (\langle X_u, X_v \rangle)_u - \langle X_u, X_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$ ;  $\langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v$ ,  $\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u$ ,  $\langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u$ ,  $\langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v$ . ■

Se le coordinate sono ortogonali ( $F = 0$ ) le soluzioni sono esplicite:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

**Esempio 5.2: Sfera**

Per  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = \sin^2 \theta$  (coordinate  $u = \theta$ ,  $v = \varphi$ ) le formule danno  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \cot \theta$ , e tutti gli altri nulli.

## 5.2 Il Theorema Egregium

**Teorema 5.3: Equazione di Gauss e Theorema Egregium**

*Per ogni carta,*

$$E K = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^2)^2. \quad (5.3)$$

*In particolare  $K$  è espressa solo da  $E, F, G$  e dalle loro derivate (fino al secondo ordine): è invariante per isometrie locali.*

*Dimostrazione.* Dall'uguaglianza delle derivate miste  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ . Derivando (5.1):

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + \ell_v N + \ell N_v, \\ (X_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{uv} + m_u N + m N_u.\end{aligned}$$

Confrontiamo i coefficienti di  $X_v$  nella base  $\{X_u, X_v, N\}$ , usando (5.1) per  $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$  e le formule di Weingarten  $N_u = -(a_{11}X_u + a_{21}X_v)$ ,  $N_v = -(a_{12}X_u + a_{22}X_v)$ :

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \ell a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - m a_{21}.$$

Dalla dimostrazione del Teorema 4.7,  $a_{21} = (Em - F\ell)/(EG - F^2)$  e  $a_{22} = (En - Fm)/(EG - F^2)$ , quindi

$$\ell a_{22} - m a_{21} = \frac{\ell(En - Fm) - m(Em - F\ell)}{EG - F^2} = E \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = EK.$$

Spostando i termini si ottiene (5.3). Poiché  $E > 0$  e i  $\Gamma_{ij}^k$  sono intrinseci (Proposizione 5.1), lo è anche  $K$ . ■

#### Per capire

Il segno di  $K$  non dipende da  $N$ , e ora vediamo che non dipende nemmeno da come la superficie è «piegata»:  $K$  è una grandezza che un abitante della superficie può misurare dall'interno (per esempio dal confronto fra circonferenza e raggio dei cerchi geodetici). Le due curvature principali, separatamente, no: un cilindro ( $k_1 = 0, k_2 = -1/R$ ) e un piano ( $k_1 = k_2 = 0$ ) hanno lo stesso prodotto 0. Ma  $k_1 k_2$  è invariante, mentre  $k_1 + k_2$  non lo è.

#### Proposizione 5.4: Coordinate ortogonali

Se  $F = 0$ ,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right].$$

*Dimostrazione.* Si sostituiscono in (5.3) le espressioni (5.2) e si sviluppano le derivate: è un calcolo diretto (da fare con carta e penna, Esercizio 5.3). ■

**Esempio 5.5: Verifiche**

- (a) *Sfera unitaria*,  $E = 1$ ,  $G = \sin^2 \theta$ :  $\sqrt{EG} = \sin \theta$ ,  $G_u / \sqrt{EG} = 2 \cos \theta$ , il secondo termine è nullo e  $K = -\frac{1}{2 \sin \theta}(-2 \sin \theta) = 1$ .
- (b) *Coordinate polari geodetiche*  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = g(u, v)^2$ :  $K = -g_{uu}/g$ . Con  $g = f(v)$  e  $u \leftrightarrow v$  si ritrova  $K = -f''/f$  del Teorema 4.9.

**Proposizione 5.6: Conseguenze**

*Se due superfici sono localmente isometriche, i punti corrispondenti hanno la stessa curvatura di Gauss. In particolare: (a) la sfera non è localmente isometrica a nessuna superficie piana: nessuna carta geografica conserva le distanze; (b) cilindro, cono e piano sono localmente isometrici fra loro, e hanno tutti  $K = 0$ ; (c) l'elicoide e il catenoide, localmente isometrici (Esercizio 3.7), hanno la stessa  $K$  nei punti corrispondenti.*

*Dimostrazione.* Se  $\phi$  è un'isometria locale, la carta  $X$  di  $S$  e  $\tilde{X} = \phi \circ X$  di  $\tilde{S}$  hanno gli stessi  $E, F, G$  (Definizione 3.9); per il Teorema Egregium  $K = \tilde{K} \circ \phi$ . (a) La sfera ha  $K = 1/R^2 > 0$ , il piano  $K = 0$ . (b), (c): vedere Esempi 3.11 e 4.10. ■

**Attenzione**

La curvatura *media* non è intrinseca: cilindro e piano sono localmente isometrici, ma  $H = -1/(2R)$  per il cilindro e  $H = 0$  per il piano. Solo il prodotto  $k_1 k_2$  sopravvive alle isometrie, non la somma  $k_1 + k_2$ .

## 5.3 Geodetiche

Su una superficie non ci sono rette, ma ci sono curve che «vanno il più dritto possibile».

**Definizione 5.7: Geodetica**

Una curva  $\alpha: I \rightarrow S$  è una *geodetica* se la componente tangente di  $\alpha''$  è nulla, cioè se  $\alpha''(t)$  è parallelo a  $N$  per ogni  $t$ . Equivalentemente, la *curvatura geodetica*  $\kappa_g = \langle \alpha'', N \times \alpha' / \|\alpha'\| \rangle$  (parametrizzazione per lunghezza d'arco) è nulla.

Una geodetica ha velocità costante:  $(\langle \alpha', \alpha' \rangle)' = 2\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$  perché  $\alpha' \perp N \parallel \alpha''$ . Esempio: nel piano le geodetiche sono le rette.

**Proposizione 5.8: Equazioni delle geodetiche**

Una curva  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  è una *geodetica* se e solo se

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*  $\alpha' = u'X_u + v'X_v$  e  $\alpha'' = u''X_u + v''X_v + u'^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + v'^2X_{vv}$ . Sostituendo (5.1), i coefficienti di  $X_u$  e  $X_v$  in  $\alpha''$  sono le due espressioni a sinistra;  $\alpha''$  è parallelo a  $N$  se e solo se si annullano entrambe. ■

Le equazioni coinvolgono solo i  $\Gamma_{ij}^k$ , quindi le geodetiche sono *intrinseche*: le isometrie le conservano. Sono un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine; dal teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali ordinarie (Picard–Lindelöf, qui non dimostrato) segue:

**Teorema 5.9: Esistenza e unicità**

Per ogni  $p \in S$  e  $w \in T_p S$  esiste  $\varepsilon > 0$  e un'unica geodetica  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ .

**Esempio 5.10: Geodetiche notevoli**

- (a) *Sfera.* Una curva sulla sfera di raggio  $R$  ha  $N = \alpha/R$ . Il cerchio massimo  $\alpha(t) = R(\cos(t/R)a + \sin(t/R)b)$ , con  $a, b$  ortonormali, ha  $\alpha'' = -\alpha/R^2 = -N/R$ : parallelo a  $N$ . Per l'unicità (Teorema 5.9) le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi.
- (b) *Cilindro.* Per  $X = (\cos u, \sin u, v)$  si ha  $E = G = 1$ ,  $F = 0$ , quindi

tutti i  $\Gamma_{ij}^k = 0$  e le equazioni diventano  $u'' = v'' = 0$ :  $u = at + b$ ,  $v = ct + d$ . Sono le eliche, le circonferenze orizzontali e le rette verticali: sono le immagini delle rette del piano srotolato.

(c) *Meridiani* di una superficie di rotazione: vedi Teorema 5.11.

### Teorema 5.11: Relazione di Clairaut

Sia  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$  con  $f'^2 + g'^2 = 1$ .

- (a) I meridiani ( $u = \text{cost}$ ) sono geodetiche; un parallelo  $v = v_0$  è geodetica se e solo se  $f'(v_0) = 0$ .
- (b) Se  $\alpha$  è una geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco e  $\psi$  è l'angolo tra  $\alpha'$  e il parallelo uscente, allora  $f(v) \cos \psi$  è costante lungo  $\alpha$ .

*Dimostrazione.* Qui  $E = f^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$ ; da (5.2),  $\Gamma_{11}^1 = 0$ ,  $\Gamma_{11}^2 = -ff'$ ,  $\Gamma_{12}^1 = f'/f$ ,  $\Gamma_{12}^2 = 0$ ,  $\Gamma_{22}^1 = 0$ ,  $\Gamma_{22}^2 = 0$ . Le equazioni sono  $u'' + 2(f'/f)u'v' = 0$  e  $v'' - ff'u'^2 = 0$ . (1) Per un meridiano  $u' = 0$ ,  $v = t$ : entrambe valgono. Per un parallelo  $v = v_0$ : la prima è  $u'' = 0$  (ok), la seconda diventa  $-ff'u'^2 = 0$ , cioè  $f'(v_0) = 0$ . (2) La prima equazione equivale a  $(f^2u')' = f^2u'' + 2ff'v'u' = f^2(u'' + 2(f'/f)u'v') = 0$ , quindi  $f^2u' = \text{cost}$ . Il parallelo uscente ha direzione unitaria  $X_u/f$ , perciò  $\cos \psi = \langle \alpha', X_u \rangle / f = f^2u'/f = fu'$ , e  $f \cos \psi = f^2u'$  è costante. ■

### Per capire

Clairaut è la conservazione del momento angolare: una geodetica si avvicina all'asse ( $f$  diminuisce) solo se la sua direzione si allinea al parallelo ( $\cos \psi$  cresce). Per questo non può passare sopra un «collo» troppo stretto: in un toro certe geodetiche restano intrappolate sul lato esterno.

### Proposizione 5.12: Le curve più corte sono geodetiche

Sia  $\alpha: [a, b] \rightarrow S$  parametrizzata per lunghezza d'arco, contenuta in una carta, di lunghezza minima fra tutte le curve in  $S$  della carta con gli stessi estremi. Allora  $\alpha$  è una geodetica.

*Dimostrazione.* Sia  $V = \lambda X_u + \mu X_v$  (con  $\lambda, \mu$  funzioni di  $s$ ) un campo tangente lungo  $\alpha$  con  $V(a) = V(b) = 0$ , e sia  $\alpha_\varepsilon = X(u + \varepsilon\lambda, v + \varepsilon\mu)$ , una famiglia di curve in  $S$  con gli stessi estremi e  $\partial_\varepsilon \alpha_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = V$ . La lunghezza  $L(\varepsilon) = \int_a^b \|\partial_s \alpha_\varepsilon\| ds$  ha minimo in  $\varepsilon = 0$ , quindi  $L'(0) = 0$ . Poiché  $\|\alpha'\| = 1$ ,

$$L'(0) = \int_a^b \langle V', \alpha' \rangle ds = \left[ \langle V, \alpha' \rangle \right]_a^b - \int_a^b \langle V, \alpha'' \rangle ds = - \int_a^b \langle V, \alpha'' \rangle ds.$$

Scegliamo  $V = \chi \alpha''_T$  con  $\chi(s) = (s-a)(b-s)$ , dove  $\alpha''_T$  è la componente tangente di  $\alpha''$  (un campo tangente, nullo agli estremi grazie a  $\chi$ ). Allora  $0 = L'(0) = - \int_a^b \chi \|\alpha''_T\|^2 ds$ , e poiché  $\chi > 0$  in  $(a, b)$  si ottiene  $\alpha''_T \equiv 0$ . ■

Non vale il viceversa in generale (due punti opposti della sfera sono collegati da infiniti semicerchi tutti geodetici; un arco di cerchio massimo più lungo di  $\pi R$  è geodetico ma non minimo).

#### In sintesi

- I simboli di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  si calcolano da  $E, F, G$ ;  $E, K$  è un'espressione in essi (equazione di Gauss):  $K$  è *intrinseca* (Egregium).
- Isometrie locali conservano  $K$ : la sfera non si può «srotolare» in un piano; cilindro e cono sì.
- Geodetiche:  $\alpha'' \parallel N$ ; equazioni con i  $\Gamma_{ij}^k$ ; cerchi massimi sulla sfera; Clairaut sulle superfici di rotazione; le curve più corte sono geodetiche.

## 5.4 Esercizi

### Esercizio 5.1: • <sup>S</sup>

Verificare l'Esempio 5.2 e controllare, con l'equazione di Gauss (5.3), che la sfera unitaria ha  $K = 1$ .

### Esercizio 5.2: • <sup>S</sup>

Verificare che l'elicoide ( $b = 1$ ) e il catenoide hanno la stessa curvatura di Gauss nei punti corrispondenti  $u = \sinh w$  (Esercizio 3.7); usare i risultati del Capitolo 4.

**Esercizio 5.3: ●●<sup>S</sup>**

Dimostrare la Proposizione 5.4. *Suggerimento:* per  $F = 0$  si ponga  $a = \sqrt{E}$ ,  $b = \sqrt{G}$  e si riscriva (5.3) in termini di  $a, b$ ; si ottiene  $K = -\frac{1}{ab} \left[ \left( \frac{b_u}{a} \right)_u + \left( \frac{a_v}{b} \right)_v \right]$ .

**Esercizio 5.4: ●●<sup>S</sup>**

Il semipiano di Poincaré è  $\{(x, y) : y > 0\}$  con  $E = G = 1/y^2$ ,  $F = 0$ . Mostrare che  $K = -1$  e che le rette verticali, parametrizzate da  $y = e^t$ , sono geodetiche.

**Esercizio 5.5: ●●<sup>S</sup>**

Mostrare che le geodetiche del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  che passano per  $(1, 0, 0)$  con direzione unitaria  $(0, \cos \beta, \sin \beta)$  sono eliche di passo  $2\pi \tan \beta$ .

**Esercizio 5.6: ●●<sup>S</sup>**

Su un cono circolare retto, si utilizzi l'isometria locale col piano per mostrare che le geodetiche sono rette del piano «srotolato». Se la semiapertura  $\alpha$  del cono (angolo fra asse e generatrice) soddisfa  $\sin \alpha < 1/2$ , mostrare che esistono geodetiche che si autointersecano. *Suggerimento:* il cono si sviluppa in un settore di angolo  $2\pi \sin \alpha$ .

**Esercizio 5.7: ●●●**

Su un toro di raggi  $R > r$ , una geodetica parte da un punto del parallelo esterno ( $f = R + r$ ) con angolo  $\psi_0$  rispetto al parallelo. Mostrare che, se  $\cos \psi_0 > (R - r)/(R + r)$ , la geodetica non raggiunge mai il parallelo interno  $f = R - r$ .

# 6

## Il teorema di Gauss–Bonnet

Il teorema di Gauss–Bonnet afferma che l'integrale della curvatura di Gauss su una superficie compatta dipende solo dalla sua *topologia*, non dalla forma. È il punto di arrivo naturale di tutto il libro: lega la geometria locale ( $K$ ,  $\kappa_g$ ) a un invariante globale (la caratteristica di Eulero).

### 6.1 Curvatura geodetica in coordinate ortogonali

Sia  $S$  orientata dalla carta  $X$  con  $N = X_u \times X_v / \|X_u \times X_v\|$ . Se  $\alpha$  è una curva su  $S$  parametrizzata per lunghezza d'arco, la sua *curvatura geodetica* è  $\kappa_g = \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle$  (Definizione 5.7); è la componente di  $\alpha''$  nel piano tangente, ortogonale a  $\alpha'$ . Le geodetiche sono le curve con  $\kappa_g \equiv 0$ . Come nel piano, il segno dipende dall'orientazione.

#### Proposizione 6.1: Formula di Liouville

Sia  $X$  una carta con  $F = 0$  e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  una curva unitaria. Sia  $\varphi(s)$  una funzione differenziabile che misura l'angolo da  $e_1 = X_u / \sqrt{E}$  a  $\alpha'$ , cioè  $\alpha' = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$  con  $e_2 = X_v / \sqrt{G}$ . Allora

$$\kappa_g = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{G_u v' - E_v u'}{2\sqrt{EG}}.$$

*Dimostrazione.*  $(e_1, e_2, N)$  è una base ortonormale positiva, quindi  $N \times e_1 = e_2$  e  $N \times e_2 = -e_1$ ; dunque  $N \times \alpha' = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$ . Derivando  $\alpha'$  lungo la curva,  $\alpha'' = \varphi'(-\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2) + \cos \varphi e'_1 + \sin \varphi e'_2$ , dove  $e'_i$  indica la derivata di  $e_i(u(s), v(s))$ . Allora, usando  $\langle e'_1, e_1 \rangle = \langle e'_2, e_2 \rangle = 0$  e

$$\langle e'_2, e_1 \rangle = -\langle e'_1, e_2 \rangle,$$

$$\kappa_g = \varphi' + \cos^2 \varphi \langle e'_1, e_2 \rangle - \sin^2 \varphi \langle e'_2, e_1 \rangle = \varphi' + \langle e'_1, e_2 \rangle.$$

Resta da calcolare  $\langle e'_1, e_2 \rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle u' + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle v'$ . Poiché  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ , il termine che deriva  $1/\sqrt{E}$  non contribuisce:  $\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle / \sqrt{EG} = -\frac{1}{2}E_v/\sqrt{EG}$  e  $\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle / \sqrt{EG} = \frac{1}{2}G_u/\sqrt{EG}$  (Proposizione 5.1, con  $F = 0$ ). ■

## 6.2 Il teorema locale

Sia  $R = X(Q)$  una regione semplice (omeomorfa a un disco) contenuta in una carta ortogonale, con bordo una curva chiusa semplice, liscia a tratti, parametrizzata per lunghezza d'arco con orientazione positiva (la regione resta a sinistra, rispetto a  $N$ ). Nei vertici  $\alpha(s_i)$  la tangente salta di un angolo esterno  $\theta_i \in (-\pi, \pi)$ , positivo se la curva gira a sinistra. Ci serve un fatto dalla teoria delle curve piane, qui senza dimostrazione:

### Teorema 6.2: Teorema delle tangenti rotanti (versione sulla superficie)

Nelle ipotesi precedenti, detta  $\varphi_i$  la funzione angolo sul tratto liscio  $[s_i, s_{i+1}]$ ,

$$\sum_i (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) + \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

Per un bordo liscio e una regione piana con la metrica euclidea è l'Umlaufsatz di Hopf (Teorema 1.14); per una metrica qualunque si deduce deformando continuamente  $E, F, G$  nella metrica euclidea: la somma è un intero multiplo di  $2\pi$  che dipende con continuità dalla deformazione, dunque non cambia. Si veda do Carmo, §4-5.

### Teorema 6.3: Gauss–Bonnet locale

Nelle ipotesi precedenti,

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g ds + \iint_R K dA + \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

*Dimostrazione.* Per la formula di Liouville,  $\oint \kappa_g ds = \sum_i (\varphi_i(s_{i+1}) -$

$\varphi_i(s_i)) + \oint \frac{G_u dv - E_v du}{2\sqrt{EG}}$ . Per il Teorema 6.2 il primo addendo è  $2\pi - \sum \theta_i$ . Il secondo, per il teorema di Green con  $P = -E_v/(2\sqrt{EG})$ ,  $Q = G_u/(2\sqrt{EG})$ , vale

$$\iint_Q \left[ \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right] du dv = - \iint_Q K \sqrt{EG} du dv = - \iint_R K dA,$$

dove abbiamo usato la Proposizione 5.4. Mettendo insieme:  $\oint \kappa_g ds = 2\pi - \sum \theta_i - \iint_R K dA$ . ■

#### Esempio 6.4: Triangoli geodetici

Se il bordo è un triangolo i cui lati sono geodetiche ( $\kappa_g = 0$ ) con angoli interni  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , gli angoli esterni sono  $\theta_i = \pi - \beta_i$  e il teorema dà

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \iint_R K dA.$$

Nel piano ( $K = 0$ ) la somma è  $\pi$ ; sulla sfera di raggio  $R$  è  $\pi + \text{Area}/R^2 > \pi$ ; su una superficie con  $K < 0$  (pseudosfera, piano iperbolico) è  $< \pi$ . Per esempio l'«ottante» della sfera unitaria con vertici  $e_1, e_2, e_3$  ha tre angoli retti e area  $4\pi/8 = \pi/2$ , e infatti  $3 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$ .

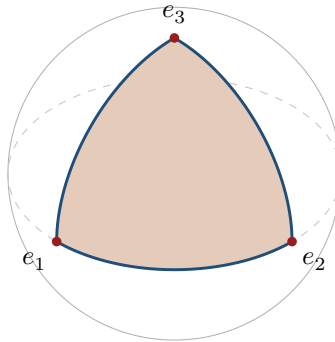


**Figura 6.1.** Triangolo geodetico («ottante») sulla sfera unitaria: tre angoli retti, area  $\pi/2$ , somma degli angoli  $3\pi/2 = \pi + \pi/2$ .

**Esempio 6.5: Calotta sferica**

Sulla sfera unitaria la calotta  $\theta \leq \theta_0$  ha bordo il parallelo  $\theta = \theta_0$  (senza vertici), con  $\kappa_g = \cot \theta_0$  rispetto all'orientazione indotta (Esercizio 6.2), lunghezza  $2\pi \sin \theta_0$ , e  $\iint_S K \, dA = \text{Area} = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$ . Infatti  $2\pi \cos \theta_0 + 2\pi(1 - \cos \theta_0) = 2\pi$ .

**6.3 Il teorema globale**

Una *triangolazione* di una superficie compatta  $S$  è una famiglia finita di triangoli (regioni semplici con tre vertici e bordo liscio a tratti) che ricopre  $S$  e tale che due triangoli distinti siano disgiunti, o abbiano in comune un vertice, oppure un intero lato. Se  $V, E, F$  sono il numero di vertici, lati, facce, la *caratteristica di Eulero* è  $\chi(S) = V - E + F$ . Enunciamo senza dimostrazione tre fatti di topologia (si veda do Carmo, §4-5): ogni superficie regolare compatta ammette triangolazioni con triangoli contenuti in carte ortogonali, anche molto fini;  $\chi(S)$  non dipende dalla triangolazione; se  $S$  è orientabile è omeomorfa a una sfera con  $g$  manici (*genere*  $g$ ) e  $\chi(S) = 2 - 2g$ .

**Teorema 6.6: Gauss–Bonnet globale**

Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regolare compatta e orientabile. Allora

$$\iint_S K \, dA = 2\pi \chi(S) = 2\pi (2 - 2g).$$

*Dimostrazione.* Prendiamo una triangolazione orientata con  $F$  triangoli  $T_j$ ,  $V$  vertici,  $E$  lati. Appliciamo il Teorema 6.3 a ogni triangolo e sommiamo:

$$\sum_j \oint_{\partial T_j} \kappa_g \, ds + \iint_S K \, dA + \sum_j \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F.$$

Ogni lato appartiene a esattamente due triangoli e viene percorso in versi opposti:  $\kappa_g$  cambia segno (cambia segno  $T$  e quindi  $N \times T$ ), quindi i contributi dei lati si cancellano e il primo termine è zero. Con gli angoli interni  $\beta_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ :  $\sum_{j,k} \theta_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \beta_{jk} = 3\pi F - 2\pi V$ , perché attorno a ogni vertice gli angoli interni dei triangoli concorrenti sommano a  $2\pi$ . Dunque  $\iint_S K \, dA = 2\pi F - 3\pi F + 2\pi V = 2\pi V - \pi F$ . Poiché ogni triangolo ha 3 lati

e ogni lato è condiviso da 2 triangoli,  $3F = 2E$ , cioè  $E = \frac{3}{2}F$  e  $2\pi\chi = 2\pi(V - \frac{3}{2}F + F) = 2\pi V - \pi F$ . Si conclude. ■

#### In sintesi

- Liouville:  $\kappa_g = \varphi' + \frac{G_u v' - E_v u'}{2\sqrt{EG}}$  (coordinate ortogonali).
- Locale:  $\oint \kappa_g ds + \iint K dA + \sum \theta_i = 2\pi$  (usa Egregium, Green e le tangenti rotanti).
- Globale:  $\iint_S K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$ .
- Triangoli geodetici:  $\sum \beta_i = \pi + \iint K dA$ .

## 6.4 Conseguenze

- Sfera* ( $g = 0$ ):  $\iint K dA = 4\pi$  per *ogni* superficie omeomorfa a una sfera, anche molto deformata (un ellissoide, una patata): per la sfera di raggio  $R$  è  $\frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2$ .
- Toro* ( $g = 1$ ):  $\iint K dA = 0$ . Quindi un toro non può avere  $K > 0$  ovunque, né  $K < 0$  ovunque: ha sempre sia punti ellittici sia punti iperbolici (come nell'Esempio 4.10:  $K > 0$  fuori,  $K < 0$  dentro).
- Genere  $\geq 2$* :  $\iint K dA = 2\pi(2 - 2g) < 0$ : la curvatura è «mediamente negativa». In particolare, una superficie compatta di  $\mathbb{R}^3$  con  $K > 0$  ovunque è omeomorfa a una sfera (le superfici compatte di  $\mathbb{R}^3$  sono orientabili).
- Rigidità topologica*: se  $K \equiv c$  è costante su una superficie compatta orientabile di genere  $g$ , allora  $c \cdot \text{Area} = 2\pi(2 - 2g)$ , perciò  $c > 0$  se e solo se  $g = 0$ .

#### Per capire

Ecco il senso profondo del teorema:  $K$  si può cambiare quanto si vuole punto per punto (schiacciando, gonfiando), ma l'integrale non cambia, finché non si cambia il numero di manici. Una piccola gobba aggiunta a una sfera ha un apice con  $K > 0$  e un anello attorno con  $K < 0$ , e la curvatura totale della gobba si compensa: l'integrale su tutta la superficie resta  $4\pi$ .

## 6.5 Esercizi

### Esercizio 6.1: • <sup>S</sup>

Un triangolo geodetico sulla sfera unitaria ha angoli  $80^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $60^\circ$ . Calcolarne l'area. Calcolare anche l'area di un triangolo geodetico con tre angoli di  $90^\circ$  sulla sfera unitaria e di uno con tre angoli di  $100^\circ$  sulla sfera di raggio 2.

### Esercizio 6.2: • <sup>S</sup>

Verificare che il parallelo  $\theta = \theta_0$  della sfera unitaria, percorso con  $\varphi$  crescente e con  $N$  uscente, ha  $\kappa_g = \cot \theta_0$  (come usato nell'Esempio 6.5).

### Esercizio 6.3: •• <sup>S</sup>

Nel toro, mostrare che  $\iint_{K>0} K \, dA = 4\pi$  e  $\iint_{K<0} K \, dA = -4\pi$  (usare  $K \, dA = \cos \tilde{v} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}$ ).

### Esercizio 6.4: •• <sup>S</sup>

Dedurre dal Teorema 6.6 che nessuna superficie compatta di genere 1 ha  $K \geq 0$  con  $K > 0$  in almeno un punto, e che nessuna superficie compatta ha  $K \leq 0$  ovunque se è omeomorfa a una sfera.

### Esercizio 6.5: ••• <sup>S</sup>

Sia  $S$  una superficie con  $K \leq 0$  ovunque. Mostrare che non esiste una regione semplice (omeomorfa a un disco) il cui bordo sia formato da *due* archi geodetici (*biangolo*).

# A

## Soluzioni degli esercizi

---

Sono date le soluzioni degli esercizi segnati con <sup>S</sup>, in forma sintetica ma completa nei passaggi chiave. Provate sempre prima da soli.

### Capitolo 1

**Es. 1.1.**  $\alpha(x) = (x, x^2)$ :  $\kappa = f''/(1 + f'^2)^{3/2} = 2/(1 + 4x^2)^{3/2}$ . Nel vertice  $\kappa = 2$ , raggio  $1/2$ ;  $T = (1, 0)$ ,  $N = JT = (0, 1)$ , centro  $(0, \frac{1}{2})$ .

**Es. 1.2.**  $\|\alpha'\| = 2r \sin(t/2)$  su  $[0, 2\pi]$ , quindi  $L = \int_0^{2\pi} 2r \sin(t/2) dt = 8r$ . L'area sotto l'arco è  $\int y dx = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = r^2(2\pi + \pi) = 3\pi r^2$ .

**Es. 1.3.**  $\kappa = ab D^{-3/2}$  con  $D = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t \in [b^2, a^2]$ .  $D$  è minimo ( $= b^2$ ) per  $t = 0, \pi$ , dove  $\kappa = a/b^2$  (massimo), e massimo ( $= a^2$ ) per  $t = \pm\pi/2$ , dove  $\kappa = b/a^2$  (minimo).

**Es. 1.4.**  $\alpha' = (1, \sinh t)$ ,  $\|\alpha'\| = \cosh t$ , quindi  $s = \int_0^t \cosh = \sinh t$ .  $\alpha'' = (0, \cosh t)$ ,  $\det(\alpha', \alpha'') = \cosh t$ ,  $\kappa = \cosh t / \cosh^3 t = 1/\cosh^2 t = 1/(1 + s^2)$ .

**Es. 1.5.** In notazione complessa  $\alpha = e^{(a+i)t}$ ,  $\alpha' = (a+i)\alpha$ ,  $\alpha'' = (a+i)\alpha'$ . Allora  $\|\alpha'\| = \sqrt{1+a^2} e^{at}$  e  $\det(\alpha', \alpha'') = \operatorname{Im}(\overline{\alpha'}\alpha'') = \|\alpha'\|^2 \operatorname{Im}(a+i) = \|\alpha'\|^2$ , da cui  $\kappa = 1/\|\alpha'\|$ . La lunghezza è  $\int_{-\infty}^0 \sqrt{1+a^2} e^{at} dt = \sqrt{1+a^2}/a$ .

**Es. 1.6.** In complesso  $\alpha = r e^{i\theta}$ ,  $\alpha' = (r' + ir)e^{i\theta}$ ,  $\alpha'' = (r'' - r + 2ir')e^{i\theta}$ . Allora  $\det(\alpha', \alpha'') = \operatorname{Im}[(r' - ir)(r'' - r + 2ir')] = 2r'^2 - r(r'' - r) = r^2 + 2r'^2 - rr''$  e  $\|\alpha'\|^2 = r^2 + r'^2$ .

**Es. 1.7.** Se la normale in  $\alpha(t)$  passa per  $p$ , allora  $\alpha - p \parallel N \perp \alpha'$ , quindi  $(\|\alpha - p\|^2)' = 2\langle \alpha - p, \alpha' \rangle = 0$ :  $\|\alpha - p\|$  è costante.

**Es. 1.8.**  $\beta' = T + (1/\kappa)'N + \frac{1}{\kappa}N' = T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N - T = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}N$ . Per  $y = x^2$ :  $T = (1, 2x)/w$ ,  $N = (-2x, 1)/w$  con  $w = \sqrt{1 + 4x^2}$ ,  $1/\kappa = w^3/2$ . Quindi  $\beta = (x, x^2) + \frac{w^2}{2}(-2x, 1) = (x - x(1 + 4x^2), x^2 + \frac{1}{2} + 2x^2) = (-4x^3, 3x^2 + \frac{1}{2})$ .

**Es. 1.9.** Per  $r = 1 + 2\cos\theta$ :  $r' = -2\sin\theta$ ,  $r'' = -2\cos\theta$ ,  $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 9 + 6\cos\theta$  e  $r^2 + r'^2 = 5 + 4\cos\theta \geq 1$ . Dunque  $\kappa ds = \frac{9 + 6\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}d\theta = \left(\frac{3}{2} + \frac{3/2}{5 + 4\cos\theta}\right)d\theta$  e, poiché  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{25 - 16}} = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\int \kappa ds = 3\pi + \pi = 4\pi$ : indice 2. Per  $\alpha = (\cos t, \sin t \cos t)$  si ha  $\alpha(t + \pi) = \Phi(\alpha(t))$  con  $\Phi(x, y) = (-x, y)$  (riflessione): la curvatura con segno cambia segno,  $\kappa(t + \pi) = -\kappa(t)$ , e a pari parametrizzazione  $\int_{\pi}^{2\pi} \kappa ds = -\int_0^{\pi} \kappa ds$ . Quindi l'indice è 0.

**Es. 1.10.** Sia  $\beta$  l'evolvente e  $C_i = \beta(s_i)$ ,  $R_i = 1/\kappa(s_i)$ . Per l'Esercizio 1.8,  $\|\beta'\| = \kappa'/\kappa^2$  (perché  $\kappa' > 0$ ), quindi  $\|C_2 - C_1\| \leq \int_{s_1}^{s_2} \|\beta'\| ds = \int_{s_1}^{s_2} \kappa'/\kappa^2 ds = R_1 - R_2$ . Se  $p \in D_2$ :  $\|p - C_1\| \leq \|p - C_2\| + \|C_2 - C_1\| \leq R_2 + R_1 - R_2 = R_1$ , cioè  $p \in D_1$ .

## Capitolo 2

**Es. 2.1.**  $\tilde{T}(s) = -T(-s)$ ,  $\tilde{T}'(s) = T'(-s) = \kappa(-s)N(-s)$ :  $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(-s)$  e  $\tilde{N}(s) = N(-s)$ . Poi  $\tilde{B} = \tilde{T} \times \tilde{N} = -B(-s)$  e  $\tilde{B}'(s) = B'(-s) = -\tau(-s)N(-s) = -\tau(-s)\tilde{N}$ , quindi  $\tilde{\tau}(s) = \tau(-s)$ . Per la riflessione  $M = \text{diag}(1, 1, -1)$  si ha  $\tilde{T} = MT$ ,  $\tilde{N} = MN$ ,  $\tilde{B} = MT \times MN = \det(M)M(T \times N) = -MB$ ; allora  $\tilde{B}' = -MB' = \tau MN = \tau\tilde{N}$ , cioè  $\tilde{\tau} = -\tau$  (mentre  $\tilde{\kappa} = \kappa$ ).

**Es. 2.2.**  $\alpha' \times \alpha'' = (6t^2, -6t, 2)$ ,  $\|\alpha' \times \alpha''\|^2 = 4(1 + 9t^2 + 9t^4)$ ,  $\|\alpha'\|^2 = 1 + 4t^2 + 9t^4$ ,  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle (6t^2, -6t, 2), (0, 0, 6) \rangle = 12$ . Quindi  $\tau = 12/(4(1 + 9t^2 + 9t^4)) = 3/(1 + 9t^2 + 9t^4)$  e  $\kappa = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}/(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}$ .

**Es. 2.3.** Con  $c = \cos t$ ,  $s = \sin t$ :  $\alpha' = e^t(c - s, s + c, 1)$ ,  $\alpha'' = e^t(-2s, 2c, 1)$ ,  $\alpha''' = e^t(-2s - 2c, 2c - 2s, 1)$ .  $\|\alpha'\|^2 = 3e^{2t}$ ;  $\alpha' \times \alpha'' = e^{2t}(s - c, -s - c, 2)$  di norma al quadrato  $6e^{4t}$ ;  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 2e^{3t}$ . Quindi  $\kappa = \sqrt{6}e^{2t}/(3\sqrt{3}e^{3t}) = \sqrt{2}/(3e^t)$ ,  $\tau = 2e^{3t}/(6e^{4t}) = 1/(3e^t)$ ,  $\tau/\kappa = 1/\sqrt{2}$ . Inoltre  $\cos\varphi = T_z = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varphi \approx 54,7^\circ$  (e  $\cot\varphi = 1/\sqrt{2}$ , in accordo con Lancret).

**Es. 2.4.**  $\alpha' = T$ ,  $\alpha'' = \kappa N$ ,  $\alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)$ ; la formula di Taylor in  $s = 0$  dà (2.3). Proiezioni: sul piano osculatore  $(T, N)$ :  $(s, \frac{\kappa}{2}s^2)$ , una parabola; sul piano rettificante  $(T, B)$ :  $(s, \frac{\kappa\tau}{6}s^3)$ , una cubica con flesso; sul piano normale  $(N, B)$ :  $(\frac{\kappa}{2}s^2, \frac{\kappa\tau}{6}s^3)$ , che soddisfa  $b^2 \propto n^3$ : una cuspid.

**Es. 2.5.** Da  $\|\alpha - c\|^2 = R^2$ :  $\langle \alpha - c, T \rangle = 0$ . Derivando,  $1 + \kappa \langle \alpha - c, N \rangle = 0$ , cioè  $\langle \alpha - c, N \rangle = -1/\kappa$ . Derivando ancora,  $\langle T, N \rangle + \langle \alpha - c, -\kappa T + \tau B \rangle = (-1/\kappa)'$ , cioè  $\tau \langle \alpha - c, B \rangle = -(1/\kappa)'$ . Poiché  $(T, N, B)$  è ortonormale,  $R^2 = \|\alpha - c\|^2 = 0 + (1/\kappa)^2 + ((1/\kappa)'/\tau)^2$ .

## Capitolo 3

**Es. 3.1.** Su  $W = \{x^2 + y^2 > 0\}$  sia  $f = (\rho - R)^2 + z^2$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .  $\nabla f = (2(\rho - R)x/\rho, 2(\rho - R)y/\rho, 2z)$  si annulla solo se  $\rho = R$  e  $z = 0$ , e lì  $f = 0 \neq r^2$ . Il toro è contenuto in  $W$  (perché  $\rho \geq R - r > 0$ ), quindi  $r^2$  è valore regolare.

**Es. 3.2.** Area =  $\iint \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 2\pi \left[ \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{12} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$ .

**Es. 3.3.**  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + 1}$ , quindi Area =  $2\pi \int_0^1 \sqrt{u^2 + 1} du = 2\pi \cdot \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 7,21$ .

**Es. 3.4.** Posto  $D = 1 + u^2 + v^2$ :  $X = (2u/D, 2v/D, 1 - 2/D)$ ,  $X_u = ((2D - 4u^2)/D^2, -4uv/D^2, 4u/D^2)$ , e analogamente  $X_v$ . Allora  $D^4 E = (2D - 4u^2)^2 + 16u^2 v^2 + 16u^2 = 4D^2 - 16u^2(D - u^2 - v^2 - 1) = 4D^2$ , quindi  $E = 4/D^2$ , e lo stesso per  $G$ ;  $D^4 F = -4uv(2D - 4u^2) - 4uv(2D - 4v^2) + 16uv = -4uv(4D - 4(u^2 + v^2) - 4) = 0$ . Il fattore di scala delle lunghezze è  $2/D$ , non costante.

**Es. 3.5.**  $E = v^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = 2$ . Nel piano con coordinate polari  $(\rho, \vartheta)$ ,  $I = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$ ; con  $\rho = \sqrt{2}v$ ,  $\vartheta = u/\sqrt{2}$  diventa  $2dv^2 + v^2 du^2$ : stessi  $E, G$ . L'applicazione  $(u, v) \mapsto (\sqrt{2}v, u/\sqrt{2})$  è iniettiva per  $u \in (0, 2\pi)$ , quindi il criterio (Proposizione 3.10) dà un'isometria fra il cono privato di una generatrice e un settore del piano di angolo  $\sqrt{2}\pi$ .

**Es. 3.6.**  $dw/d\theta = -1/\sin\theta$ , quindi  $d\theta = -\sin\theta dw$  e  $I = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 = \sin^2\theta(dw^2 + d\varphi^2)$ . Nella carta  $(\varphi, w)$  la metrica è un multiplo scalare di

quella euclidea: gli angoli sono quelli euclidei. Una curva che taglia i meridiani ( $\varphi = \text{cost}$ , rette verticali nella carta) con angolo costante è dunque una curva che taglia le verticali con angolo costante: una retta.

## Capitolo 4

**Es. 4.1.**  $\Pi = 2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ; per  $\theta = 60^\circ$ :  $2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$ .  $\Pi = 0$  se  $\tan^2 \theta = 2$ , cioè  $\theta = \pm \arctan \sqrt{2} \approx \pm 54,7^\circ$  (e le direzioni opposte).

**Es. 4.2.**  $f_x = 2x$ ,  $f_y = 2y$ ,  $f_{xx} = f_{yy} = 2$ ,  $f_{xy} = 0$ ,  $W^2 = 1 + 4\rho^2$  ( $\rho^2 = x^2 + y^2$ ).  $K = 4/(1 + 4\rho^2)^2 > 0$  e  $H = 2(1 + 2\rho^2)/(1 + 4\rho^2)^{3/2}$ . In  $(0, 0)$ :  $K = 4$  (e  $H = 2$ ).

**Es. 4.3.**  $f = xy$ :  $f_x = y$ ,  $f_y = x$ ,  $f_{xx} = f_{yy} = 0$ ,  $f_{xy} = 1$ :  $K = -1/W^4$  con  $W^2 = 1 + x^2 + y^2$ ,  $H = -2xy/(2W^3) = -xy/W^3$ .  $H = 0$  sugli assi coordinati ( $xy = 0$ ).

**Es. 4.4.**  $H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0$ , con uguaglianza se e solo se  $k_1 = k_2$ . Se  $H = 0$ :  $K = -\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \leq 0$ .

**Es. 4.5.**  $X_u = (\cos v, \sin v, 0)$ ,  $X_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$ ;  $X_u \times X_v = (b \sin v, -b \cos v, u)$ ,  $N = (b \sin v, -b \cos v, u)/\sqrt{u^2 + b^2}$ .  $X_{uu} = 0$ ,  $X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$ ,  $X_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$ :  $\ell = 0$ ,  $m = -b/\sqrt{u^2 + b^2}$ ,  $n = 0$ . Con  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = u^2 + b^2$ :  $K = -m^2/G = -b^2/(u^2 + b^2)^2$  e  $H = (En - 2Fm + G\ell)/(2EG) = 0$ .

**Es. 4.6.**  $N = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ ;  $X_{uu} = -(R + r \cos v)(\cos u, \sin u, 0)$ ,  $X_{uv} = r \sin v(\sin u, -\cos u, 0)$ ,  $X_{vv} = -r(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ . Quindi  $\ell = -(R + r \cos v) \cos v$ ,  $m = 0$ ,  $n = -r$ , e  $E = (R + r \cos v)^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = r^2$ :  $K = \ell n/(EG) = \cos v/(r(R + r \cos v))$ .  $K > 0$  per  $|v| < \pi/2$ ; l'area è  $\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(R + r \cos v) dv du = 2\pi r(\pi R + 2r)$ .

**Es. 4.7.**  $f' = -e^{-v}$ ,  $g' = \sqrt{1 - e^{-2v}}$ :  $f'^2 + g'^2 = e^{-2v} + 1 - e^{-2v} = 1$ . Per il Teorema 4.9,  $K = -f''/f = -e^{-v}/e^{-v} = -1$ .

**Es. 4.8.** Sia  $p$  un punto di  $S$  a distanza massima  $R$  dall'origine (esiste,  $S$  compatta). Per ogni curva  $\alpha$  su  $S$  con  $\alpha(0) = p$  la funzione  $\|\alpha\|^2$  ha un massimo in 0:  $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$ , quindi  $p \perp T_p S$  e  $N = \pm p/R$ ; scegliamo  $N = p/R$ . Per  $\alpha$  parametrizzata per lunghezza d'arco,  $0 \geq (\|\alpha\|^2)''/2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \alpha, \alpha'' \rangle =$

$1 + R\kappa_n$ , cioè  $\kappa_n \leq -1/R$  in ogni direzione. Dunque  $k_1, k_2 \leq -1/R < 0$  e  $K = k_1 k_2 \geq 1/R^2 > 0$ .

## Capitolo 5

**Es. 5.1.** Con  $E = 1, F = 0, G = \sin^2 \theta$ , (5.2) dà  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \cot \theta$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ . Nell'equazione di Gauss:  $EK = 0 - (\cot \theta)_\theta + 0 + 0 - 0 - \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta = 1$ .

**Es. 5.2.** Elicoide con  $b = 1$ :  $K = -1/(u^2 + 1)^2$ ; con  $u = \sinh w$ ,  $u^2 + 1 = \cosh^2 w$ ,  $K = -1/\cosh^4 w$ . Catenoide:  $K = -1/\cosh^4 v$  con  $v = w$ . Coincidono.

**Es. 5.3.** Con  $a = \sqrt{E}, b = \sqrt{G}, F = 0$ :  $\Gamma_{11}^1 = a_u/a, \Gamma_{11}^2 = -aa_v/b^2, \Gamma_{12}^1 = a_v/a, \Gamma_{12}^2 = b_u/b, \Gamma_{22}^1 = b_v/b$ . In (5.3),  $a^2 K = (-aa_v/b^2)_v - (b_u/b)_u + \frac{a_u b_u}{ab} - \frac{aa_u b_v}{b^3} + \frac{a_v^2}{b^2} - \frac{b_u^2}{b^2}$ . Sviluppando le derivate i termini con  $a_v^2/b^2$  e  $b_u^2/b^2$  si semplificano e resta  $a^2 K = -\frac{aa_{vv}}{b^2} + \frac{aa_v b_v}{b^3} - \frac{b_{uu}}{b} + \frac{a_u b_u}{ab}$ , che è  $-\frac{a}{b} \left[ \left( \frac{b_u}{a} \right)_u + \left( \frac{a_v}{b} \right)_v \right]$ . Poiché  $G_u/\sqrt{EG} = 2b_u/a$  e  $E_v/\sqrt{EG} = 2a_v/b$ , si ottiene la formula della Proposizione 5.4.

**Es. 5.4.** Con  $a = b = 1/y$  ( $u = x, v = y$ ):  $b_u = 0, a_v/b = -1/y, (a_v/b)_y = 1/y^2$ ;  $K = -\frac{1}{ab} [0 + 1/y^2] = -y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = -1$ . I simboli sono  $\Gamma_{12}^1 = -1/y, \Gamma_{11}^2 = 1/y, \Gamma_{22}^2 = -1/y$ , gli altri nulli; le equazioni sono  $x'' - \frac{2}{y} x' y' = 0$  e  $y'' + \frac{1}{y} (x'^2 - y'^2) = 0$ . Per  $x = \cosh t, y = e^t$  valgono entrambe ( $y'' - y'^2/y = e^t - e^t = 0$ ).

**Es. 5.5.** Per  $E = G = 1$  le geodetiche soddisfano  $u'' = v'' = 0$ ; con velocità unitaria e dati iniziali  $(u', v') = (\cos \beta, \sin \beta)$ :  $u = t \cos \beta, v = t \sin \beta$ . Un giro completo ( $\Delta u = 2\pi$ ) richiede  $t = 2\pi/\cos \beta$  e innalza di  $\Delta v = 2\pi \tan \beta$ .

**Es. 5.6.** Il cono si ottiene dal piano identificando i lati di un settore di angolo  $\gamma = 2\pi \sin \alpha$ ; i suoi rivestimenti locali sono isometrici al piano, quindi le geodetiche sono (immagini di) segmenti di retta. Una retta  $\ell$  che non passa per il vertice, vista nel rivestimento, copre un angolo totale  $\pi$  attorno al vertice; se  $\gamma < \pi$  essa passa su più di un settore e dunque interseca la sua copia ruotata di  $\gamma$  in un punto  $q \neq 0$ : sul cono  $\ell$  passa due volte per la stessa immagine di  $q$ .

## Capitolo 6

**Es. 6.1.** Area =  $\sum \beta_i - \pi$  sulla sfera unitaria:  $(80 + 70 + 60)^\circ - 180^\circ = 30^\circ = \pi/6$ . Tre angoli retti:  $\pi/2$ . Sulla sfera di raggio 2 con tre angoli di  $100^\circ$ : eccesso =  $300^\circ - 180^\circ = 2\pi/3$  e Area =  $R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ .

**Es. 6.2.** Con  $\varphi = s/\sin \theta_0$ :  $\alpha(s) = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, \cos \theta_0)$ ,  $\alpha' = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ ,  $\alpha'' = -\frac{1}{\sin \theta_0}(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ ,  $N = \alpha$ , e  $N \times \alpha' = (-\cos \theta_0 \cos \varphi, -\cos \theta_0 \sin \varphi, \sin \theta_0)$ . Quindi  $\kappa_g = \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \cot \theta_0$ .

**Es. 6.3.**  $K \, dA = \frac{\cos v}{r(R + r \cos v)} r(R + r \cos v) \, du \, dv = \cos v \, du \, dv$ . Su  $|v| < \pi/2$ :  $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 4\pi$ ; su  $\pi/2 < v < 3\pi/2$ :  $-4\pi$ . Totale  $0 = 2\pi\chi$ .

**Es. 6.4.** Per  $g = 1$ ,  $\iint K \, dA = 0$ . Se  $K \geq 0$  e  $K(p) > 0$ , per continuità  $K > 0$  in un intorno di  $p$ , quindi  $\iint K \, dA > 0$ : assurdo. Per la sfera ( $g = 0$ ) l'integrale è  $4\pi > 0$ , quindi non può essere  $K \leq 0$  ovunque.

**Es. 6.5.** Sia  $R$  un biangolo con vertici di angoli esterni  $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi)$  (lati geodetici:  $\kappa_g = 0$ ). Gauss-Bonnet locale:  $\iint_R K \, dA + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ . Se  $K \leq 0$  allora  $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$ , impossibile perché  $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$ .

# Bibliografia

---

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976 (seconda edizione: Dover, 2016).
- [2] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, seconda edizione, 2010.
- [3] M. Abate, F. Tovena, *Curves and Surfaces*, Springer (UNITEXT), 2012.
- [4] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds*, American Mathematical Society, terza edizione, 2015.
- [5] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828 (il *Theorema Egregium*).
- [6] H. Hopf, *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, Compositio Mathematica 2 (1935).